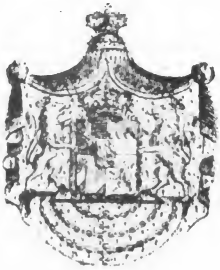
Math. P. 642 ⁂



BIBLIOTHECA
REGIA.
MONACENSIS.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Math. D 642 f

Grundzüge

der

Arithmetik

nebst

den Anfangsgründen

der

Algebra.

Populär dargestellt

zur

Erleichterung des Selbst-Studiums

von

Dr. **Ph. Wirth.**

Bamberg, 1840.

Druck und Verlag des literarisch-artistischen Instituts.

1.1.C

Digitized by Google

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Digitized by Google

Vorwort.

Die Anwendungen der Mathematik auf Wissenschaft und Gewerbe werden bei dem jetzigen Genius des menschlichen Treibens so ungemein häufig, daß nicht nur dem Gelehrten, sondern jedem Mann aus dem Volke daran liegen muß, nicht fremd zu bleiben in einer materiell so mächtigen Wissenschaft. Aber nicht jeder nach wissenschaftlicher Bildung strebende Bürger ist jung genug und unbeschäftigt genug, um seine Mappe in eine Schule tragen zu können. — Er ist gemüßigt, in der Einsamkeit seines eignen Zimmers der Schüler eines Buches zu seyn, welches ihm eigne Auswahl oder Zufall in die Hände spielte. Ein solcher Lehrer sagt aber in der Regel nur einmal, was er sagen zu müssen glaubt; er stellt gewöhnlich nicht den nämlichen Gegenstand so lange von verschiedenen Seiten dar, bis sein Schüler ihn verstanden hat. Daher die Schwierigkeit mathematischen Selbst-Studiums. Ist ein einziger Satz dieser Wissenschaften unverstanden geblieben, so sieht sich der Leser gehemmt in weiterem Studium, er versteht nun alle Sätze nicht mehr, die auf jenen ersten fußen, und legt mißmuthig sein Buch und sein mathematisches Studium bei Seite, während er bei mündlichem Vortrage eines Lehrers nicht hängen bleiben kann, indem ihm immer jede Frage freisteht. —

Digitized by Google

Aber in keiner Region der Mathematik bewegt sich der Anfänger schwerfälliger, als gerade in den allerersten Anfangs-Gründen. Schreiber dieses hatte während vieljährigen Unterrichtes, den er Schülern der verschiedensten Alters- und Fassungs-Klassen ertheilte, Gelegenheit genug, die rauhen Stellen kennen zu lernen, an denen der ungeübte Fuß zu straucheln pflegt; und suchte dieselben in vorliegendem Werkchen durch mehrseitige Darstellung unter Fernhaltung pedantischer Formkrämerei möglichst zu ebnen. Ist der Freund dieser ernsten aber edlen Wissenschaft über die ersten Schwierigkeiten hinweg, so thut ihm jedes ausführlichere mathematische Werk die Dienste eines Lehrers, und eben diesen Dienst dem Leser zu erweisen, den Anfänger über die schwierigsten Punkte seines Weges unvermerkt wie durch mündlichen Vortrag wegzugeleiten, war in diesen Blättern mein Bestreben. — Möge dasselbe nicht ohne Erfolg bleiben. Und von dieser Seite und in diesem Gesichtspunkte erwarte ich auch von Kennern beurtheilt zu werden.

Digitized by Google

Einleitung.

§. 1.

Menge, Größe, Anzahl, Zahl nach dem Sprachgebrauche des gemeinen Lebens.

Wenn wir die uns umgebende Aussen-Welt auch nur auf das Oberflächlichste betrachten, so finden wir eine Vielheit oder eine Menge einzelner Dinge, und bekommen durch Vergleichung einen Begriff von der Größe solcher Mengen oder Vielheiten; so sagen wir z. B. im Bette des Baches liegen eine Menge von Kieselsteinen, aber die Menge der Sandkörner; die am Strande des Meeres von den Wellen genetzt werden, ist doch noch größer. Statt des Ausdruckes Menge bedient sich die Sprache auch sehr häufig des Wortes „Anzahl" oder Zahl. So hört man: Die Anzahl der Sterne, welche durch ein gutes Teleskop in der Milch-Strasse wahrgenommen werden, ist ungeheuer groß; oder: wer mag die Zahl der Heuschrecken angeben, die in dichten Wolken über die Ebene hinziehen.

§. 2.

Zählen nach gemeinem Sprachgebrauche.

Das Geschäft nun, solche Vielheiten, Mengen, die Anzahl oder Zahl von einzelnen Dingen oder Einzelnheiten zu bestimmen, nennt man „Zählen". Wer z. B. seine Baarschaft überzählt, ehe er eine Reise antritt, will sich blos eine klare Anschauung von der Menge oder Zahl der einzelnen Gulden oder Kreuzer verschaffen, die ihm zur Disposition stehen.

Digitized by Google

§. 3.

Größe im Raum, und bildliche Uebertragung auf nicht räumliche Verhältnisse.

Nach dem Sprach-Gebrauche des gemeinen Lebens denkt man sich unter dem Ausdrucke: „Größe" eine Eigenschaft jener Dinge, welche im Raume existiren, mithin eine Ausdehnung haben. Wir sagen z. B. die Paläste der Fürsten sind größer, als die Hütten der Land-Leute, und meinen damit räumliche Ausdehnung nach allen Richtungen. — Wir sagen auch: „die Höhe des Aetna ist größer, als die des Vesuv's", und meinen damit Ausdehnung nach einer Richtung.

Bildlich trägt man aber auch das Wort Größe auf Gegenstände über, bei welchen von räumlicher Ausdehnung durchaus keine Rede mehr ist. Wir sagen z. B. „Dulden ist bisweilen eine größere Tugend, als Handeln" oder: die Kunst, zufrieden zu sterben, ist größer, als die Kunst, glücklich zu leben.

Auf eben diese Weise sprechen wir auch von der Größe einer Menge von Einzelnheiten, oder von der Größe einer Zahl.

§. 4.

Größe an und für sich.

Obschon wir in der Regel nur von Größe, als Eigenschaft der uns umgebenden Dinge reden, so liegt es doch in der Fähigkeit des Menschen-Geistes, sich Größe an und für sich zu denken, unbekümmert um die Gegenstände, denen sie als Eigenschaft zukömmt; und zwar dürfen wir das mit eben so vielem Rechte thun, als wir uns erlauben, zu sagen: Langes Hinsehen auf Roth ist für das Auge ermüdend und schmerzlich, wogegen Grün sehr wohlthuend auf dasselbe wirkt. Wir lassen auch hier ganz dahin gestellt seyn, ob das Roth, von dem wir reden, einem Stücke Scharlach-Tuch oder einer Cactus-Blüthe, ob das Grün einem seid'nen Regenschirme oder einem Saatfelde als Eigenschaft angehört.

Digitized by Google

Wir haben uns also unter Größe das Gesetztseyn einer Ausdehnung oder einer Menge zu denken.

§. 5.

Wir lernen eine Größe durch Vergleichung mit einer bereits bekannten Größe kennen.

Bei dem geringsten Nachdenken finden wir, daß jede Ausdehnung sich als öftere Wiederholung oder als eine Menge von kleineren Ausdehnungen betrachten läßt. Haben wir nun eine klare Anschauung von der kleineren Ausdehnung, so gewinnen wir auch einen Begriff von der größeren, sobald wir nachzählen, wie oft diese kleinere Ausdehnung in der größeren enthalten ist. Es ist z. B. nicht nöthig, daß wir irgend eine von den ägyptischen Pyramiden wirklich gesehen haben müssen, um uns deren Höhe vorstellen zu können. Sobald uns nur gesagt wird, sie sey fünfhundert Schuh hoch, so denken wir uns den Schuh, eine uns bekannte Länge, fünfhundertmal wiederholt auf einander gestellt, und wir haben die Höhe der Pyramide.

Daraus folgt aber wieder unmittelbar, daß räumliche Ausdehnungen unter die Form von Mengen gebracht, und eben so, wie Mengen, mittels Zählens erfaßt werden können.

§. 6.

Auf wie vielerlei Art wir zur Kenntniß einer Größe gelangen können.

Wenn wir eine Größe wollen kennen lernen, so ist dieß nur möglich entweder durch unmittelbare Anschauung oder durch Vergleichung derselben mit einer bereits bekannten Größe. Gesetzt es sagte uns jemand, ein Berg sey achthundert Toisen hoch, so werden wir vor allem fragen, wie lang denn eigentlich die Toise sey; um nun hierauf Auskunft zu geben, muß uns der Gefragte entweder einen Stab vorzeigen, der wirklich eine Toise lang ist, oder er muß uns sagen, die Toise hat sechs Schuh; in beiden Fällen werden

Digitized by Google

wir von der Länge der Toise Kenntniß gewinnen. Denken wir uns dann diese Toise achthundertmal auf einander gestellt, so bekommen wir eine Vorstellung von der Höhe des Berges.

§. 7.

Einheit. Einheiten verschiednen Ranges.

Wir können uns hienach vorstellen, irgend eine Menge sey dadurch entstanden, daß eine Einzelnheit, d. i. ein Gegenstand, um dessen übrige Eigenschaften wir uns gar nicht kümmern, und den man schlechtweg Einheit nennt, öfter wiederholt vorkommt. Dieser Gegenstand, der hier als Einheit auftritt, kann selbst wieder eine Menge seyn, die aus vielen Einheiten andrer Größe besteht.

Sagt man z. B. auf diesem Schlachtfelde kämpften dreißig tausend Mann, so entsteht diese angegebene Menge durch dreißigtausendmalige Setzung des einzelnen Mannes, der hier als untheilbare Einheit, oder als Grund-Einheit auftritt, die keiner weiterer Zerlegung in andere Einheiten mehr fähig ist.

Man hätte aber auch sagen können: auf dem Schlachtfelde kämpften fünfzehn Regimenter; hier ist das Regiment die Einheit, durch deren fünfzehnmalige Setzung die ganze kämpfende Truppenmasse dargestellt wird. Diese Einheit ist aber selbst wieder aus zweitausend Grund-Einheiten zusammengesetzt, wenn wir das Regiment zu zweitausend Mann annehmen wollen.

Hiedurch kommen wir auf den Begriff von Einheiten verschiedener Ordnungen, deren jede höhere die niedere öfter in sich faßt; z. B. Gulden, Kreuzer, Pfennig, Heller, wo letztere Münze die untheilbare Grund-Einheit ist, während Pfennig, Kreuzer und Gulden Einheiten höherer Ordnung darstellen.

§. 8.

Unstätige. Stätige Größen.

Auf ähnliche Weise können wir uns die Entstehung einer räumlichen Ausdehnung durch wiederholtes Setzen einer

Digitized by Google

gleichnamigen räumlichen Ausdehnung denken, welche letztere hier, als die bereits bekannte Größe als Einheit auftritt. Während aber bei der Erzeugung von Mengen oder Zahlen durch öftere Wiederholung der Einheit von irgend einer eigenthümlichen Verbindung der gesetzten Einheiten gar keine Rede war, so verhält es sich ganz anders, wenn räumliche Ausdehnungen durch wiederholtes Setzen einer räumlichen Einheit erzeugt werden sollen. In diesem Falle müssen die Einheiten so verbunden seyn, daß, wo die eine aufhört, die andere anfängt; oder mit andern Worten, die zu verbindenden Einheiten müssen in stätiger nirgends unterbrochener Aufeinanderfolge seyn.

Erfahren wir z. B. ein Mann habe dreihundert Gulden baaren Geldes, so kümmern wir uns wenig darum, ob er die ganze Summe in einer Börse bei sich trage, oder ob er es an zehn verschiedene Orte vertheilt habe, denn die Summe bleibt immer gleich groß, mögen die sie ausmachenden Münzen beliebig zerstreut seyn. —

Wollte sich aber jemand die Dicke des kugelförmigen Erdballs veranschaulichen, so müßte er, im Falle ihm dieselbe zu siebzehnhundert Meilen angegeben wäre, die Meile siebzehnhundertmal so aneinander gereiht denken, daß alle diese Theile eine einzige ununterbrochene Linie ausmachten.

Deßhalb nennt man Mengen oder Zahlen unstätige, räumliche Ausdehnungen aber stätige Größen.

§. 9.

Messen. Maaß. Wahl des Maaßes.

Wenn wir, um eine räumliche oder stätige Größe (§. 8.) kennen zu lernen, erforschen, wievielmal eine uns bereits bekannte gleichnamige Raumes-Größe gesetzt werden muß, damit die zu untersuchende Größe erzeugt werde, so pflegen wir dieses Geschäft durch den Ausdruck messen zu bezeichnen. Die gleichnamige bekannte Größe, durch deren öftere Setzung wir die zu messende Größe erzeugt denken, nennen wir Maaß.

Digitized by Google

Wenn z. B. angegeben wird, daß der Umfang unserer Erdkugel fünftausend und vierhundert Meilen betrage, so ist die Meile das Maas für den Umfang der Erde.

Leichteren Ausdruckes halber richtet man sich bei der Wahl des Maases nach der Größe der zu messenden Ausdehnung. So mißt man die Länge eines Backsteines nach Zoll, die Länge einer Wegstunde nach Schuh, die Entfernung Petersburgs von Paris nach Wegstunden oder Meilen oder Tagreisen. Die Entfernung des Mondes von der Erde nach Halbmessern des Erdballs; die Entfernungen der Fixsterne von uns nach Halbmessern der Erd-Bahn, oder bei den entlegneren nach Siriusweiten, in welchem letzteren Falle die gebrauchte Einheit selbst schon ein paar Billionen Meilen enthält.

Eben so mißt man den Inhalt einer Flüssigkeits-Maaß durch den Cubic-Zoll, den Raum-Inhalt der Erde aber durch die Cubic-Meile und so in andern Fällen.

§. 10.

Einheit und Zahl. Maaß und zu messende Größe müssen gleichartig seyn.

Da wir die Zahl durch wiederholte Setzung der Einheit, die räumliche Größe aber durch öftere Setzung des Maaßes erzeugt denken, so ist unschwer einzusehen, daß sich die Einheit von der durch ihre Wiederholung erzeugten Zahl nur durch Menge; das Maaß von der zu messenden Ausdehnung nur durch Größe unterscheiden dürfen.

Linien kann man also nur durch eine Linie, Flächen nur durch eine Fläche, körperliche Räume nur durch einen körperlichen Raum messen, eine Geld-Summe als solche nur durch eine Geld-Summe, Zeit durch Zeit u. s. w. bestimmen.

Man pflegt diese einleuchtende Wahrheit auch so auszudrücken, Zahl und entsprechende Einheit; zu messende Ausdehnung und gebrauchtes Maaß müssen gleichartig seyn.

Digitized by Google

Der Sprach-Gebrauch nimmt sich manche Freiheiten und erlaubt sich manche Abkürzungen; und von dieser Seite treten einige, jedoch nur scheinbare Abweichungen von dem so eben ausgesprochenen Gesetze auf.

Wir sagen z. B. von Bamberg nach Nürnberg sind eilf Stunden, bestimmen also scheinbar eine Länge durch eine Zeit — aber es ist hier die Sache ganz anders gemeint, als ausgedrückt; nicht die Stunde ist es, die wir hier als Maaß gebrauchen, sondern der Weg, den ein Mann bei mittlerer Gang-Schnelligkeit binnen einer Stunde zurücklegen kann; es ist also hier keineswegs Länge durch Zeit, sondern Weg durch Weg, also Länge durch Länge gemessen. Mit ähnlicher Abkürzung bestimmt der Cap-Colonist Weg-Strecken nach Pfeifen Tabak, und so in ähnlichen Fällen.

§. 11.

Unbenannte. Benannte Zahlen.

Wenn wir von Mengen reden, so ist nicht immer nothwendig, die Einheit, aus welcher die Menge oder Zahl entsprang, in ihrer Eigenthümlichkeit namhaft zu machen. Sieben Einheiten sind z. B. ganz gewiß um zwei Einheiten größer, als fünf Einheiten derselben Art. Dieß ist wahr, was auch für eine Einheit gemeint seyn mag. Man drückt sich daher in solchen Fällen kürzer aus, und sagt: Sieben ist um zwei größer, als fünf.

Zahlen, bei deren Ausdruck man die Einheit, deren Wiederholung sie ihre Entstehung verdanken, gar nicht namhaft macht, nennt man unbenannte Zahlen, wogegen solche, bei denen die zugehörige Einheit angegeben ist, benannte Zahlen heißen.

§. 12.

Berücksichtigung der Form bei Raumes-Größen.

So wenig bei unstätigen Größen oder Zahlen von eigenthümlicher Aneinanderreihung der Theile, aus denen sie bestehen, die Rede seyn kann, so unentbehrlich ist die Rücksicht-

Digitized by Google

nahme auf die Art der Aneinanderreihung und Verbindung der einzelnen Theile bei Betrachtung der Raumes- oder stätigen Größe; d. i. die Berücksichtigung der Form.

§. 13.

Mathematik. Eine der ältesten Wissenschaften.

Menge, Größe und Form liegen dem Menschen bezüglich der körperlichen Seite seiner Existenz so nahe, daß er schon auf seiner niedersten Bildungs-Stufe veranlaßt ist, sich damit zu beschäftigen. Ohne klares Bewußtseyn dessen, was es thut, zählt und mißt schon das Kind, selbst ehe es nur dahin gelangt ist, seiner Muttersprache ganz mächtig zu seyn. Was das Kind oder der kindliche Naturmensch instinktartig weis und anwendet, bringt sich der geistig Gebildetere zum klaren Bewußtseyn — erhebt es zur Wissenschaft; und da Menge, Größe und Form mit dem körperlichen Leben des Menschen so unzählige und innige Berührungs-Punkte haben, so ist erklärlich, daß das selbstbewußte Wissen oder die Wissenschaft von Menge, Größe und Form schon zu einer Zeit Pflege und Ausbildung fand, wo andere Theile des menschlichen Wissens noch in der träumerischen Periode der Kindheit ruhten. Die alten Griechen nannten die Wissenschaft von Menge, Größe und Form, oder kürzer die Wissenschaft von den Größen: Μαθησις (mathesis), daher der in's Deutsche übergegangene Name: Mathematik, was durch „Größen-Lehre" vollkommen übersetzbar ist. *)

*) Anmerk. Das griechische Wort Μαθησις wörtlich in's Deutsche übergetragen, heißt Wissenschaft. Man nannte demnach die Mathematik schlechtweg Wissenschaft, ohne nähere Bezeichnung, als ob man ausser der Mathematik gar keine Wissenschaft gekannt, oder dieses Namens gewürdigt hätte. — Diese allgemeine Bezeichnung rührt aber wohl nur daher, weil man die Mathematik, als die sinnlichste und greifbarste Wissenschaft, zuerst aus dem Stande unklaren instinktartigen Wissens in das klare Reich der Wissenschaft erhob. Da redete man freilich nur von der Größen-Lehre, wenn man den Ausdruck Wissenschaft

Digitized by Google

§. 14.

Arithmetik und Geometrie.

Da denn doch Menge und Größe, oder Zahl und Ausdehnung unterſchieden werden müſſen, ſo theilt man die geſammte Mathematik in zwei Haupt-Abtheilungen, nämlich in die Lehre von den gezählten Größen und in die Lehre von den gemeſſenen Größen; oder in die Lehre von den Zahlen und in die Lehre von den Raumes-Größen.

Erſteren Theil der Mathematik nennt man Arithmetik von dem griechiſchen Wort ἀριθμος (arithmos), welches ſo viel, als das deutſche Wort Zahl bedeutet.

Der zweite Theil der Mathematik, welcher von den gemeſſenen Größen handelt, führt den Namen Geometrie, der aus dem Griechiſchen ſtammt, und auf deutſch Erdausmeſſung heißt, wahrſcheinlich weil man Sätze aus dieſem Zweige menſchlichen Wiſſens, noch ehe er den Rang einer Wiſſenſchaft gewonnen hatte, bereits anwendete, um Feldflächen auszumeſſen oder zu vertheilen.

§. 15.

Größere Anwendbarkeit der Arithmetik.

Wenn man bei Betrachtung von räumlichen Ausdehnungen nur auf Größe derſelben ſieht, ohne nach der gegenſeitigen Anordnung der Theile, d. i. nach der Form zu fragen, ſo iſt es hinreichend, nur anzugeben, wie oftmal das Maaß in der zu meſſenden Größe enthalten iſt; da nun hiedurch die räumliche Größe durch eine Zahl ausgedrückt werden kann, ſo iſt begreiflich, wie Raumes-Größen auch in den Bereich der Arithmetik herübergezogen, alſo durch Rechnung beſtimmt werden können; daher denn die Arithmetik eine weit ausgedehntere Anwendbarkeit hat, als die Geometrie.

---

gebrauchte; ſo wie dieſes Schloß oder jenes Dörfchen den Namen: „Neuhaus“ erhielt, weil damals, als es gebaut wurde, kein neueres Gebäude in der Nähe war, womit es verwechſelt werden konnte.

Digitized by Google

§. 16.

Zeichen für Mengen. Ziffern.

Wenn wir unsere Vorstellungen und Gedanken andern mittheilen wollen, so müssen wir für die mannigfaltigen gedachten Gegenstände gewisse allgemein gültige Zeichen oder Bilder haben. In jedem Menschen, dem wir ein solches Zeichen oder Bild vor die Wahrnehmung bringen, wird dann die nämliche Vorstellung, die wir an das Zeichen knüpfen, angeregt, und was ein Mensch gedacht hat, erzeugt sich in der Seele des andern nach, sobald nur der zweite die übereinkünftlich angenommenen Zeichen kennt. Diese Zeichen können Formen oder Laute seyn; sie haben entweder Aehnlichkeit mit dem bezeichneten Gegenstand, oder auch nicht. Ersteres ist der Fall bei der alten Bilder- oder Hieroglyphen-Sprache gewesen, und wir finden das nämliche Verhältniß in manchen hörbaren Bezeichnungen; z. B. in den Wörtern: Donner, Rauschen, Knall, Lispeln u. b. a.

Jede von unserer Seele noch erfaßbare Menge von Einheiten erzeugt in uns eine gewisse innere Anschauung, ein Bild, welches wir einem andern Menschen nur mittelst gewisser Zeichen mittheilen können. — Wohl wäre es unter gewissen Beschränkungen thunlich, für kleinere Mengen oder Zahlen Bilder anzuwenden, die jedem Menschen verständlich wären. Man könnte z. B. sagen:

. . .
. . . und . . zusammengenommen,
. . .
. .

gibt die Menge . . . . . .
. . . . . .

aber diese Bezeichnungs-Art wäre viel zu beschwerlich und unbehülflich, zudem bei größern Zahlen ganz unanwendbar. Man hat daher durch Uebereinkunft für die verschiednen Zahlen verschiedene Zeichen ersonnen und in Anwendung gebracht, die mit den bezeichneten Mengen gar keine oder doch nur sehr

Digitized by Google

verwischte Aehnlichkeit haben, und indem man Kunstgriffe anwendet, wie in der Schrift-Sprache, drückt man nun alle möglichen Zahlen durch Zusammenstellung weniger Zeichen aus, so wie wir im Stande sind, mittelst vier und zwanzig Alphabet-Buchstaben eine endlose Fülle von Gedanken auszudrücken. Man nennt diese Zahlzeichen auch Ziffern; und oft, wenn zum Ausdrucke einer Zahl mehrere Ziffern verwendet werden müssen, nimmt man keinen Anstand, den Ausdruck einer Zahl kurzweg eine Zahl zu nennen; indem man ohnehin weiß, daß hiedurch keine Verwechslung entstehen kann; so wenig als aus der Redeform: der Maler X hat meinen Freund Y sehr gut gemalt, wo man sehr wohl weiß, daß es sich nur um das Bildniß des Y handelt.

§. 17.

Arithmetik in engerer Bedeutung. Algebra. Buchstaben-Rechnung. Rechenkunst.

Wenn Zahlen durch Ziffern und Ziffer-Verbindungen ausgedrückt werden, so fordert jede bestimmte Zahl auch eine bestimmte Ziffer-Verbindung. So bedeutet z. B. das Zeichen 7 gerade nur eine gewisse Menge von Einheiten, nämlich: . . .

Man könnte aber auch gezählte Größen in gewissen Fällen auf eine allgemeinere Weise ausdrücken. Statt z. B. zu sagen:

Wenn man . von . . . wegnimmt, und bleibt .

übrig, so muß nothwendig . und . zusammen genommen,

wieder die ganze Menge . . . geben, könnte man sich auch ausdrücken, wie folgt: wenn man von irgend einer Zahl a irgend eine andere Zahl b wegnimmt, und es bleibt die Zahl d übrig, so müssen die beiden Zahlen b und d zusammengenommen so groß seyn, als die Zahl a.

Digitized by Google

Wäre z. B. a die Zahl Neun, und b die Zahl Sieben, so wäre d die Zahl Zwei; und es müßte Sieben und Zwei zusammengenommen, so groß als Neun seyn.

Aber eben weil dieſe Wahrheit nicht blos für die Zahlen Neun, Sieben und Zwei, ſondern für eine unendliche Menge von andern Zahlen gilt, iſt in ähnlichen Fällen eine allgemeinere Bezeichnungs-Art durch Buchſtaben weit zweckmäßiger als durch Ziffern; und in vielen Fällen unentbehrlich.

Wenn nun die Arithmetik ihre Zahlen nur durch Ziffern und Ziffer-Verbindungen bezeichnet, alſo nur Mengen in ihrer Beſonderheit zum Gegenſtande ihrer Unterſuchungen macht, ſo heißt ſie Arithmetik in engerer Bedeutung.

Stellt aber die Arithmetik allgemeine Betrachtungen über gezählte Größen an, und wählt allgemeine Bezeichnungen, ſo führt ſie den Namen „allgemeine Arithmetik.“ Dieſer Theil der Arithmetik kommt auch nicht ſelten unter dem Titel Algebra vor; und die vorbereitenden, letzterer dienenden, Rechnungs-Operationen pflegt man, obgleich nicht ſehr paſſend, Buchſtaben-Rechnung zu nennen.

Wenn die Arithmetik in engerer Bedeutung auf Rechnungen angewendet wird, die im Intereſſe des bürgerlichen Lebens vorkommen, gibt man ihr den Namen: Rechenkunſt.

Andere Abtheilungen, welche die Schule mit der Größen-Lehre vorgenommen hat, werden paſſender an anderem Orte aufgeführt werden.

Digitized by Google

I. Abſchnitt.

Von der Bezeichnung und dem Ausdrucke der Zahlen.

§. 18.

Römiſche — arabiſche Ziffern.

Die Römer wählten zur Bezeichnung einzelner Zahlen gewiſſe Buchſtaben und Buchſtaben-Verbindungen. So wurden z. B. die Mengen: . . . . . der Reihe nach bezeichnet durch: I II III VII u. ſ. w.

Hiedurch wurde aber der Ausdruck größerer Zahlen ſehr ſchwerfällig. Um z. B. unſere jetzige Jahrzahl Eintauſend achthundert und vierzig auszudrücken, brauchte jenes Volk die Bezeichnung MDCCCXL, alſo ſieben einzelne Zeichen.

Auch die Griechen bedienten ſich zur Bezeichnung der Zahlen ihrer Alphabet-Buchſtaben.

Wir gebrauchen, um jede beliebige Zahl auszudrücken, nur neun, aus der arabiſchen Schrift herſtammende Zeichen, die ſogenannten arabiſchen Ziffern, nebſt einem Ausfüllungs-Zeichen, welches wir Null nennen.

§. 19.

Für die Mengen:

. . . . . .

ſind der Reihe nach die entſprechenden Zeichen:

1 2 3 4 5 6 7 8 9

und das Ausfüllungs-Zeichen iſt 0 (Null.)

Digitized by Google

§. 20.

Das decadische System. Einer, Zehner, Hunderter u. s. f.

Da man aber mit diesen neun Zeichen an und für sich nicht mehr als eben so viele einzelne Zahlen ausdrücken könnte, so bedient man sich, um jede beliebig große Zahl bezeichnen zu können, folgender Methode:

1) Man zählt die Einheiten fort bis 9, statt aber zehn Einheiten zu sagen, sagt man ein Zehner.

Dieser Zehner ist eine Einheit höherer (zweiter) Klasse; und man wählt wieder zu seiner Bezeichnung die Ziffer 1. Damit man aber den Zehner nicht mit der Einheit verwechsle, setzt man, um ihn auszudrücken, hinter die Ziffer 1 das Ausfüllungs-Zeichen: 0.

10 bedeutet also zehn Einheiten oder einen Zehner.
30 bezeichnet dreißig Einheiten oder drei Zehner.
90 bezeichnet neunzig Einheiten oder neun Zehner.

Man ersieht, daß hienach die Ziffer, welche Zehner bezeichnen soll, immer die zweite Stelle einnehmen muß, und umgekehrt, wenn letzteres der Fall ist, bedeutet sie immer Zehner, auch wenn sie ihren Platz nicht durch Anhängung des Ausfüllungs-Zeichens 0, sondern einer geltenden Ziffer angewiesen bekommt. So bedeutet z. B. $\left.\begin{matrix}20\\4\end{matrix}\right\}$ zwei Zehner und vier Einer, was man aber auch so ausdrücken kann: 24.

2) Die Zehner zählt man wieder nur fort, bis neun, und nennt zehn Zehner einen Hunderter. Um einen Hunderter auszudrücken, welcher als höhere oder Einheit 3ter Klasse auftritt, gebraucht man die nämliche Ziffer 1, hängt ihr aber, um Verwechslung mit Einheiten und Zehnern zu vermeiden, zwei Nullen an. Hienach bedeutet der Ausdruck 100 einen Hunderter oder hundert Einheiten.

Der Hunderter muß im Ausdrucke immer die dritte Stelle von rechts nach links oder von hinten nach vorn einnehmen, dieser Ort mag ihm nun durch Anhängung von Nullen oder von geltenden Ziffern angewiesen seyn.

Digitized by Google

So bedeutet z. B. der Ausdruck 382 drei Hunderter, acht Zehner und zwei Einheiten oder dreihundert zwei und achtzig Einheiten.

Der Ausdruck 807 bezeichnet acht Hunderter, keinen Zehner und sieben Einheiten.

3) Eben so zählt man nur neun Hunderter, zehn Hunderter aber nennt man einen Tausender; das Zahl-Zeichen für die Tausender nimmt von rechts nach links die vierte Stelle ein, so daß z. B. 8000 acht Tausender, 3400 drei Tausender und vier Hunderter, aber keine Zehner und Einer, 7008 sieben Tausender, keine Hunderter und Zehner, nebst acht Einern bezeichnet.

4) Auf die beschriebene Art fährt man nun fort, indem man immer zehn Einheiten nächst niederer Klasse in eine einzige Einheit nächst höherer Klasse zusammenfaßt, wodurch man eine Reihe von Einheiten erhält, deren jede, von rechts nach links hin gerechnet, den Werth der nächstvorhergehenden oder nächst niederen zehnmal in sich faßt; und deren jede nächstfolgende im Anschreiben eine nächst höhere Stelle einnimmt.

Da das griechische Wort δέκα (deca) „zehn" bedeutet, so pflegt man die hier auseinander gesetzte Art zu zählen, das decadische System zu nennen, welches seinen Ursprung und allgemeines Vorkommen vielleicht der Anzahl der Finger an unsern Händen verdankt.

§. 21.

Weitere Benennung der decadischen Einheiten-Ordnungen.

Nach dem decadischen Systeme folgen nun die Einheiten-Klassen in nachstehend angegebener Ordnung aufeinander, und werden folgender Weise ausgedrückt.

Einer — 1 — eine Ziffer — erste Stelle.
Zehner — 10 — zwei Ziffern — zweite Stelle.
Hunderter — 100 — drei Ziffern — dritte Stelle.
Tausender — 1000 — vier Ziffern — vierte Stelle.
Zehntausender — 10000 — fünf Ziffern — fünfte Stelle.

v. Rechts n. Links.

Digitized by Google

Hunderttausender — 100000 — sechs Ziffern — sechste Stelle.

Tausendtausender oder Million — 1000000 — sieben Ziffern — siebente Stelle.

Zehn Million, hundert Million, tausend Million, zehntausend Million, hunderttausend Million, tausendtausend Million oder Billion, welche ausgedrückt wird durch 1000000000000 nämlich durch 1 mit zwölf angehängten Nullen.

Ferner:

Zehn Billion, hundert Billion, tausend Billion, zehntausend Billion, hunderttausend Billion, tausendtausend Billion oder Trillion, welche ausgedrückt wird durch 1000000000000000000 nämlich 1 mit achtzehn angehängten Nullen.

Man ersieht leicht, daß der Tausender, die Million und die Billion so zu sagen Marken oder Ruhepunkte in der Reihe von Einheiten bilden, die im decadischen Systeme dargestellt werden. Von diesen fängt man nach links hin wieder eben so an zu zählen, wie bei den einfachen Einheiten; nämlich: 1 Million, 10 Million, 100 Million u. s. f.

Nach der Trillion (tres, drei) kommt die Quadrillion von (quatuor, vier) ausgedrückt durch 1 mit viermal sechs oder 24 Nullen.

Die Quintillion v. (quinque, fünf) ausgedrückt durch 1 mit fünfmal sechs oder 30 Nullen.

Die Sextillion v. (sex, sechs) ausgedrückt durch 1 mit sechsmal sechs oder 36 Nullen u. s. f.

Die Septillion (septem, sieben) die Octillion (octo, acht) die Noventillion v. (novem, neun) u. s. w.

Aber schon die Billion drückt eine so ungeheuere Menge von Einheiten aus, daß die menschliche Phantasie dieselbe nicht mehr fassen kann, daher kommt selbst die Billion nur in astronomischen oder Curiositäten-Rechnungen, die höhern Einheiten aber fast gar nie vor.

Digitized by Google

§. 22.

Niedergeschriebene Zahlen auszusprechen.

Um eine niedergeschriebene Zahl bequemer aussprechen zu können, bezeichnet man die Tausender, sie mögen nun tausend Einer, oder tausend Million, oder tausend Billion u. s. w. ausdrücken, mittelst eines über die zugehörige Ziffer gesetzten Punktes, die Million durch I, die Billion durch II, die Trillion durch III, die Octillion durch VIII, indem man die fortlaufenden römischen Ziffern:

I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X etc.
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 wählt.

Sollte z. B. die gegebene Zahl

3 7 5 4 3 2 1 5 8 9 2

ausgesprochen werden, so zählt man von rechts bei der Ziffer 2 anfangend: Einer, Zehner, Hunderter, Tausender

2 9 8 5.

Weil diese Ziffer 5 — Tausender bedeutet, so setzt man darüber einen Punkt. Nun zählt man weiter:

Zehn T. Hundert T. Million
1 2 3

und zeichnet über diese Ziffer 3 ein römisches I. Sodann

Zehn Million. Hundert M. Tausend M.
4 5 7 und setzt

über die Ziffer 7 einen Punkt. Endlich noch 3 hunderttausend Million. Nämlich:

I
3 7 5 4 3 2 1 5 8 9 2

Diese Zahl spricht man nun so aus:

37 Tausend 543 Million, 215 Tausend und 892.

Wäre ferner die Zahl

3825080237296542 3546

gegeben, so würde man sie bezeichnen, wie folgt:

III II I
3825080237296542 3546

und so aussprechen:

Digitized by Google

38 Trillion, 250 Tauſend 802 Billion, 372 Tauſend 965 Million 423 Tauſend 546.

Oder die Zahl:

327000000300203782 08

bezeichnet, gibt

III . II . I .
327000000300203782 08

und ausgeſprochen

32 Trillion, 700 Tauſend Billion, 30 Tauſend u. 20 Million 378 Tauſend und 208.

Man fängt demnach, um eine gegebene Zahl zu bezeichnen, rechter Hand an, ſetzt über die vierte Ziffer einen Punkt (Tauſend Einer), über die ſiebente ein I (Million), über die zehnte einen Punkt (Tauſend Million), über die dreizehnte ein II (Billion), über die ſechzehnte einen Punkt (Tauſend Billion), über die neunzehnte ein III (Trillion) u. ſ. w. Lieſt man nun die bezeichnete Zahl ab, und man kommt an eine Ziffer, über welcher ein Punkt ſteht, ſo ſpricht man ſogleich das Wort Tauſend und dazu die nächſtfolgende höhere Einheit, z. B. bei

. II
13255000000000000

ſpricht man 13 Tauſend 255 Billion, weil hinter dem über 3 ſtehenden Punkte zunächſt die über 5 ſtehende römiſche Ziffer II folgt, und ſo auch in andern Fällen.

§. 23.

Ausgeſprochene Zahlen anzuſchreiben.

Wäre dagegen eine Zahl ausgeſprochen, und man ſollte ſie anſchreiben, ſo würden wir, wenn uns ſonſt die gehörige Uebung und Fertigkeit abginge, eine Reihe von Sternchen oder Nullen hinſetzen, und die ausgeſprochenen Einheiten der verſchiedenen Klaſſen an die ihnen zugehörigen Stellen ſetzen.

Digitized by Google

Es sey z. B. die Zahl anzuschreiben: 802 Trillion, 522 Tausend 402 Million und 22, so würde man, da die 802 Trillionen noch achtzehn Nullen hinter sich erfordern, einundzwanzig Sternchen ansetzen, diese, wie Ziffern bezeichnen und die gegebenen Ziffern sodann an ihre richtige Stelle setzen. Nämlich:

III . II . I .
* * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

8 0 2 5 2 2 4 0 2 2 2

Füllt man nun die leergebliebenen Stellen durch Nullen aus, so hat man die vollständig niedergeschriebene Zahl:

III . II . I .
802000000522402000022, welche nach dieser Bezeichnung ausgesprochen, die geforderte Zahl wieder gibt.

Bei einiger Uebung kann man dieses Hülfsmittel um so leichter entbehren, als so vielziffrige Zahlen in praktischen Anwendungen fast gar nie vorkommen.

§. 24.

Einige Beispiele zur Anwendung:

I .
52370823
52 Million, 370 Tausend 823

. I .
80230702365
80 Tausend 230 Million 702 Tausend 365.

. II . I .
703002375423654021
703 Tausend und 2 Billion, 375 Tausend 423 Million, 654 Tausend und 21.

Oder umgekehrt.

801 Million und 612:

I .
* * * * * * * * * .
8 0 1 0 0 0 6 1 2

5 Billion, 22 Million und 522703.

II . I .
* * * * * * * * * * * * *
5 0 0 0 0 2 2 5 2 2 7 0 3 u. s. w.

Anm. Die Kunst, Zahlen anzuschreiben und auszusprechen, pflegt man Numeration (von numerare, zählen) zu nennen.

Digitized by Google

II. Abſchnitt.

Von den Operationen, die mit Zahlen vorgenommen werden können, im Allgemeinen.

§. 25.

Wie man Dinge im Allgemeinen, und wie man Zahlen verändern könne.

Jede Veränderung, die man mit einem gegebenen Dinge vornehmen kann, beſteht darin, daß man irgend eine Eigenſchaft, die dem Dinge wirklich bereits zukommt, ändert. So kann man z. B. keineswegs davon reden, den Ton einer Roſe oder die Farbe eines Flötentones zu ändern, aus dem einfachen Grund, weil Ton nicht der Roſe, und Farbe nicht dem Tone als Eigenſchaft zukommt. Eine Zahl als ſolche hat weiter keine Eigenſchaft, als daß ſie Ausdruck einer Menge, oder Ausdruck der oftmaligen Setzung einer beſtimmten Einheit iſt; mit einer Menge aber können wir keine andere Veränderung vornehmen, als daß wir ſie größer oder kleiner machen.

Alle Veränderungen, die man mit einer Zahl vornehmen kann, in ſofern ſie nicht blos die Form des Ausdrucks betreffen, beſtehen demnach in Vergrößerung oder Verkleinerung.

Auſſerdem kann man auch bei benannten Zahlen ſtatt einer gegebenen Einheit eine verwandte größere oder kleinere ſetzen, wodurch dann unbeſchadet des Werthes die Form eine Veränderung erleiden kann. So iſt z. B. der Ausdruck 36 Zoll vom Ausdrucke 3 Schuh der Form nach verſchieden, obgleich beide Zahlen die nämliche Länge, ſo wie 2 fl. und 120 kr. die nämliche Geld-Summe bezeichnen.

Digitized by Google

§. 26.

Auf wievielerlei Art eine Zahl größer gemacht werden kann.

Vergrößerung einer Zahl ist auf zweierlei Art möglich und zwar:

a) indem man zu einer Zahl eine andre gleichartige hinzufügt, so daß beide Zahlen ein Ganzes ausmachen.

Um z. B. die Geld-Summe 35 fl. größer zu machen, setze man noch 6 fl. dazu, so erhält man 41 fl. Soll die unbenannte Zahl 512 größer werden, so setze man eine unbenannte Zahl 18 dazu, und man erhält 530.

Es versteht sich übrigens, daß die Zahl, die man zu einer gegebenen setzt, um letztere größer zu machen, Ausdruck der Wiederholung derselben Einheit ist, wie die erste, d. i. daß beide gleichartig seyen. Fünf Fuder werden nicht größer, wenn man drei Ellen hinzu setzt.

b) Wenn man eine gegebene Zahl irgend wie oftmal wiederholt setzt.

Um z. B. die Zahl 8 größer zu machen, setze man sie dreimal, wodurch man 24 erhält.

§. 27.

Auf wie vielerlei Art eine Zahl kleiner gemacht werden kann.

Auch die Verkleinerung einer Zahl kann auf zweierlei Art bewerkstelligt werden, nämlich:

a) indem man von der Zahl, welche man kleiner machen will, einen Theil derselben, oder eine gleichartige Zahl wegnimmt. So wird z. B. die Zahl 8 Gulden kleiner, wenn man davon 3 Gulden wegnimmt; wodurch 5 Gulden übrig bleibt.

b) Indem man eine gegebene kleiner zu machende Zahl in irgend eine Anzahl gleicher Theile theilt, und mit Wegwerfung der übrigen, nur einen dieser Theile setzt. Soll z. B. die Zahl 8 kleiner gemacht werden, so denke man sich dieselbe in vier gleiche Theile getheilt, und einer davon, nämlich 2, ist sicherlich kleiner als 8.

Digitized by Google

§. 28.

Zahlen können in zweierlei Hinsicht mit einander verglichen werden.

Ohne Zahlen größer oder kleiner zu machen, kann man sie auch bezüglich ihrer Größe mit einander vergleichen. Vergleicht man nun zwei Zahlen in dieser Beziehung mit einander, so können zweierlei Fragen gestellt werden, und zwar:

a) um wieviel ist die eine Zahl größer, als die andere; oder

b) wievielmal ist die eine größer, als die zweite.

Vergleicht man z. B. die beiden Zahlen 16 und 4, so ergibt sich, daß 16 um 12 größer ist als 4; dagegen ist es nur 4 mal größer, als 4.

So ist ferner 24 um 18 größer als 6, aber 4 mal größer als die nämliche Zahl.

§. 29.

Zeichen für: gleich, größer, kleiner.

Wenn man andeuten will, daß zwei Zahlen einander gleich sind, so setzt man das Zeichen = dazwischen, welches man durch das Wörtchen „gleich" oder das lateinische aequale ausdrückt. Man nennt daher dieses Zeichen auch das Gleichheits-Zeichen.

Z. B. 36 Zoll = 3 Schuh
10 Klaft. = 60 Schuh

u. s. in andern Fällen.

Soll aber ausgedrückt werden, daß eine Zahl größer ist, als eine andere, so pflegt man das Zeichen > so zwischen beide Zahlen zu setzen, daß die Spitze des Winkels nach der kleineren, die Oeffnung nach der größeren hingewendet ist, z. B.

5 > 3 d. i. fünf ist größer, als drei
8 < 17 d. i. acht ist kleiner, als siebzehn.

§. 30.

Grundsatz. Erläuterung durch Beispiele.

Grundsatz (Axiom) nennt man den Ausdruck einer Wahrheit, von welcher jeder nothwendig überzeugt seyn muß,

Digitized by Google

sobald er nur den Sinn des Ausdruckes derselben versteht. Niemand wird z. B. daran zweifeln, daß 5 fl. gerade so viel Geld ausmachen, als die nämlichen 5 fl.; daß 3 Schuh nicht länger und nicht kürzer sind, als die nämlichen 3 Schuh. Man sagt daher, der Satz:

Jedes Ding ist sich selbst gleich

ist ein Grundsatz oder ein unmittelbar klarer Satz.

Denken wir uns ferner, ein Vater habe zwei Söhne, deren jeder seine Höhe gegen die seines Vaters abmißt, und es fände sich, daß jeder von den beiden Söhnen genau so hoch gewachsen wäre, als der Vater, würden wir dann wohl Anstand nehmen, zu glauben, daß einer von den beiden Söhnen so groß ist, als der andre?

Oder wenn wir drei Krüge **A**, **B** und **C** haben, von denen **A** genau so viel Wein hält, als **C**, und **B** ebenfalls genau so viel faßt als **C**, so werden wir gleich überzeugt seyn, daß **A** und **B** gleich großen Flüssigkeits-Inhalt haben. Daher der Grundsatz:

Wenn zwey Dinge dem nämlichen dritten gleich sind, so sind sie unter sich gleich.

Oder wenn Jemand seinem Freunde zehn Sechser aus der Börse nimmt, dafür aber ein Guldenstück hineinbringt, so wird niemand sagen, daß er etwas entwendet habe, weil 1 fl. = 10 Sechser.

So würde jedermann zwei Werkleute auslachen, die im Ernste darüber streiten wollten, ob diese Mauer 12 bayr. Zoll oder einen bayrischen Schuh dick wäre; da nämlich 1 Schuh = 12 Zoll. So kann man immer einen Schuh für 12 Zoll und umgekehrt, setzen. Daher der Grundsatz:

Gleiches kann für Gleiches gesetzt werden u. s. in andern Fällen.

§. 31.

Mögliche Anzahl der Stammrechnungs-Arten. Reduktion arithmetischer und geometrischer Verhältnisse.

Da man Zahlen in Bezug auf ihren Werth nur durch Vergrößerung oder Verkleinerung verändern kann, so gibt

es eigentlich nur zwei Rechnungs-Operationen oder Stammrechnungs-Arten; da aber jede wieder in zwei Unterabtheilungen zerfällt, so stellt man deren vier auf, nämlich Addition, Subtraktion, Multiplication und Division, von welchen Addition und Multiplikation, ferner Subtraktion und Division zusammengehören.

Auf Form-Veränderung und Vergleichung beruht die Lehre von der Reduction und vom arithmetischen und geometrischen Verhältnisse.

Da diese vier Stammrechnungs-Arten die Grundlage der gesammten Arithmetik bilden, so wollen wir sie nun einzeln einer näheren und genauen Betrachtung unterziehen.

Digitized by Google

III. Abschnitt.

Von den vier Stamm-Rechnungs-Arten insbesondere.

Von der Addition.

§. 32.

Addiren. Summanden. Summe. Zeichen für die Addition.

Zwei oder mehrere Zahlen, deren jede ein Vielfaches derselben Einheit ist, addiren, heißt diese Zahlen als Theile eines Ganzen betrachten, und dieses Ganze wirklich bilden.

Sollen z. B. die Zahlen 3 fl., 8 fl. und 5 fl. addirt werden, so soll eine Geldsumme 16 fl. gebildet werden, welche aus den Theilen 3 fl., 8 fl. und 5 fl. besteht. Das Geschäft der Addition ist demnach die Vereinigung mehrerer Theile in ein Ganzes.

Diejenigen Zahlen, welche in ein Ganzes vereinigt werden sollen, nennt man Summanden, die Zahl aber, welche als Ganzes aller Summanden, als Theilen, zusammengenommen gleich ist, heißt Summa oder Summe.

Wenn also die Zahlen 3, 8 und 5 zusammengenommen der Zahl 16 gleich sind, so sind 3, 8 und 5 die Summanden und 16 ist die Summe.

Um anzudeuten, daß zwei oder mehrere Zahlen addirt werden sollen, setzt man zwischen die Summanden ein aufrechtstehendes + Kreuz und ließt dieses Zeichen durch das Wörtchen plus (mehr). z. B.

$$5 + 4 + 9 + 1 = 19$$

bedeutet, daß die Zahlen 5, 4, 9 und 1 zusammen addirt, die Summe 19 geben.

Digitized by Google

§. 33.

Die Summanden müssen gleichartig seyn.

Die in der Addition zum Vorschein kommende Summe ist eine Zahl und als solche muß sie ein Vielfaches irgend einer Einheit, kann aber nie das Vielfache mehrerer verschiedner Einheiten zugleich seyn. Werde z. B. 2 Zoll, 5 Zoll und 3 Zoll addirt, wodurch man die Summe 10 Zoll erhält, so sind die Zahlen 2, 5 und 3 Vielfache der Einheit: Zoll; und die Summe 10 ist ein Vielfaches der nämlichen Einheit.

Dagegen kann man die Summanden 8 Schuh, 6 fl. und 9 Maaß nicht in eine Summe zusammenfassen, weil jeder Summand ein Vielfaches einer andern Einheit ist. Zwar ist $8 + 6 + 9 = 23$ aber weder 23 Schuh, noch 23 fl. noch 23 Maaß.

So kann man auch unter den Einheiten, die im decadischen Zahlen-Systeme vorkommen, nur Einer zu Einern, Zehner zu Zehnern, Millionen zu Millionen u. s. w. addiren, nämlich: Die Summanden müssen gleichartig seyn.

§. 34.

Die Ordnung der Summanden ist gleichgültig. Statt einen Summanden auf einmal zu addiren, kann er theilweise addirt werden.

In welcher Ordnung man die Summanden zusammenfaßt, um ein Ganzes daraus zu bilden, ist ganz gleichgültig; man erhält begreiflich die nämliche Summe, wenn die Summanden $8 + 3 + 2 + 5$ in der Ordnung, wie sie hier stehen, oder in irgend einer anderen, z. B. $3 + 8 + 5 + 2$ oder $2 + 5 + 3 + 8$ u. s. w. zusammengefaßt werden, so wie, wenn wir eine Summe von 100 fl. in Kronenthalern und Sechsern einzunehmen haben, es uns gewiß gleichgültig ist, ob man uns zuerst die Kronenthaler und hernach die Sechser, oder umgekehrt vorzählt.

Auch ist es uns unverwehrt, irgend einen Summanden nur theilweise und allmählig zu addiren. Statt daß wir z. B. zu 12 die Zahl 5 addiren, steht es uns auch frei, zu 12 zu

Digitized by Google

erſt 3 und hernach 2 zu addiren, indem offenbar $3+2=5$ und Gleiches für Gleiches geſetzt werden kann.

Es iſt nur erforderlich, daß alle Theile der Summanden in der Summe enthalten ſeyen.

§. 35.

Mehrziffrige Zahlen zu addiren.

Daß der Leſer einziffrige Zahlen addiren könne, wird vorausgeſetzt. Die Addition mehrziffriger Zahlen läßt ſich aber auf die Addition einziffriger zurückführen.

Sind nämlich eine beliebige Anzahl mehrziffriger Zahlen gegeben, die in eine Summe zuſammengefaßt werden ſollen, ſo verfährt man, wie folgt:

1) Man ſetzt die gegebenen Summanden ſo unter einander, daß alle Einer, alle Zehner, alle Hunderter u. ſ. f. alle gleichnamigen Einheiten-Klaſſen ſenkrechte Reihen bilden, und ziehe der Bequemlichkeit halber darunter einen Querſtrich.

Die gegebnen Summanden ſeyen z. B.
$3854 + 901 + 18 + 39232$, ſo ordne man ſie ſo unter einander:

3854			39232
901	oder auch		3854
18			901
39232			18
***			***

2) Nun faßt man alle Einer, alle Zehner, alle Hunderter, alle Tauſender, und zwar jede Einheiten-Klaſſe beſonders, in einzelne Summen zuſammen.

Sind aber in der Summe der Einer ein oder mehrere Zehner enthalten, ſo zählt man dieſe zu den Zehnern; enthält die Summe der Zehner den Hunderter ein- oder einigemal, ſo zählt man die darin enthaltnen Hunderter zur Reihe der Hunderter u. ſ. w.

Betrachten wir z. B. obige Addition

39232
3894
901
18
***

Digitized by Google

so kommen daselbst vor:

15 Einheiten oder	5 Einer und 1 Zehner
9 Zehner	. . . . . 9 Zehner
19 Hunderter oder	9 Hunderter und 1 Tausender
12 Tausender oder	2 Tausend. u. 1 Zehntausender
3 Zehntausender . . .	. . . . . 3 Zehntausender

Zählt man zur rechten Hand die gleichnamigen Einheiten-Klassen zusammen, so gewinnt man als Summe:

5 Einer, 10 Zehner, 9 Hunderter,
3 Tausender und 4 Zehntausender,

oder hiefür, weil 10 Zehner einen Hunderter geben:

5 Einer, kein Zehner, 10 Hunderter,
3 Tausender und 4 Zehntausender,

oder auch, da 10 Hunderter einen Tausender geben:

5 Einer, kein Zehner, kein Hunderter,
4 Tausender und 4 Zehntausender,

was man auch auf kürzerem Wege so darstellen kann:

39232
3854
901
(1)(3)(1)18
(1)
44005

wo die eingeschloss'nen kleinern Ziffern die Einheiten nächsthöherer Klasse bezeichnen, die in der nächstniedern Klasse enthalten sind. Durch dieses Verfahren gewinnt man jedenfalls die richtige Summe, indem in derselben alle Theile der Summanden enthalten sind.

§. 36.

Einige Beispiele zum Nachrechnen.

1)

8325 + 523 + 8196 + 12 + 9

8325
523
8196
12
(1)(1)(2)9
17065

Digitized by Google

2)

735 + 89982 + 36258 + 99 + 7

```
  735
89982
36258
   99
(1)(2)(2)(3)7
------------
127081
```

§. 37.

Verfahren, wenn bey der Summirung einer senkrechten Reihe mehr als 99 herauskommt.

Es kann auch der Fall vorkommen, daß die Summirung irgend einer Einheits-Klasse eine Zahl liefert, welche größer ist, als 99 z. B. man könnte bey Summation der Hunderter 324 Hunderter bekommen. Dann würde man die Ziffer 4 an der Stelle der Hunderter stehen lassen, die 2 zu den Tausendern und die 3 zu den Zehntausendern zählen.

Ist die Anzahl der Summanden so groß, daß es unbequem wäre, dieselben auf einmal zu addiren, so addire man sie parthienweise, und faße zuletzt die gewonnenen Theil-Summen in eine Haupt-Summe zusammen.

Wer z. B. ein ganzes Jahr hindurch seine tägliche Ausgaben notirt hätte, und am Ende des Jahres seine Gesammt-Ausgabe während desselben berechnen wollte, würde am Beßten thun, die Ausgaben in jedem Monate besonders zu addiren, und zuletzt die erhaltenen zwölf Summen in eine einzige zusammenzufaßen.

Von der Subtraktion.

§. 38.

Von einem Dinge kann nur ein gleichartiges weggenommen werden.

Es ist eine unumstößliche Wahrheit, daß man da, wo nichts ist, auch nichts wegnehmen kann; und daß, wenn man von irgend einem Dinge etwas wegnehmen will, das Weg-

Digitized by Google

zunehmende entweder ein Theil oder eine Eigenschaft des Dinges seyn muß, von welchem es wegzunehmen ist. So kann z. B. ein Karpfe durch keinen Unfall seine Stimme verlieren, und einer Blind-Schleiche kann man die Füße nicht abschneiden, weil Stimme dort und Füße da, gar nicht vorhanden sind.

Soll von einer Zahl etwas weggenommen werden, so muß das Wegzunehmende wieder eine Zahl seyn, weil der Zahl gar keine Eigenschaft zukommt, als das öftere Wiederholtseyn einer bestimmten Einheit; woraus denn auch folgt, daß von einer Zahl, welche Ausdruck einer bestimmten Einheit ist, eben nur wieder eine Zahl weggenommen werden kann, welche Ausdruck der nämlichen Einheit ist.

Wer z. B. fünf Guldenstücke einstecken hat, kann davon durchaus nicht 5 einzelne Kreuzer wegnehmen, weil keine da sind. Wohl kann er ein Guldenstück wechseln lassen, aber dann nimmt er die 5 Kr. nicht von den fünf Guldenstücken weg, sondern von sechzig Kreuzern, die er um das Guldenstück eingewechselt hat.

§. 39.

Subtrahiren. Minuend. Subtrahend. Rest. Zeichen für die Subtraktion.

Eine Zahl von einer andern subtrahiren, heißt sie von derselben wegnehmen, und angeben, welche Zahl übrig bleibt.

z. B. 3 von 8 subtrahiren *), heißt 3 von 8 wegnehmen, und angeben, daß die Zahl 5 übrig bleibt.

Die Zahl, von welcher eine andere weggenommen werden soll, heißt **Minuend** (von numerus minuendus, die zu vermindernde Zahl).

Die Zahl, um welche der Minuend kleiner gemacht oder die vom Minuend weggenommen werden soll, führt den Namen **Subtrahend** (numerus subtrahendus, abzuziehende Zahl).

---

*) Das Wort subtrahiren stammt aus dem Lateinischen subtrahere, abziehen und wegnehmen.

Digitized by Google

Jene Zahl, welche vom Minuend noch übrig bleibt, wenn man den Subtrahend davon weggenommen hat, nennt man den Rest oder die Differenz (differentia, Unterschied).

Zieht man z. B. 5 von 12 ab, und es bleibt 7 übrig, so ist 12 der Minuend, 5 der Subtrahend und 7 der Rest oder die Differenz.

Um anzudeuten, daß von einer Zahl eine andere subtrahirt werden solle, setze man einen Querstrich so zwischen beide Zahlen, daß der Minuend vor und der Subtrahend hinter demselben steht. So bezeichnet z. B. der Ausdruck:

$$12 - 5 = 7$$

daß 5 von 12 subtrahirt, den Rest 7 läßt.

§. 40.

Subtrahend und Rest zusammen addiren geben den Minuend.

Der Subtrahend muß offenbar ein Theil des Minuends seyn, denn wäre er dieß nicht, so wäre er gar nicht im Minuend vorhanden, könnte also auch gar nicht davon weggenommen werden. Nun ist aber die Differenz das, was vom Minuend noch übrig bleibt, wenn man den Subtrahend davon weggenommen hat; die Differenz ist also offenbar auch ein Theil des Minuends, und zwar machen der Subtrahend und die Differenz, als Theile, den Minuend, als Ganzes, vollständig aus.

Schneidet man z. B. von einem Bande ein Stück weg, so stellt das ganze Band den Minuend, das weggeschnittene Stück den Subtrahend, und das übrigbleibende den Rest oder die Differenz vor — aber es ist sehr klar, daß das weggeschnittene Stück und das übrigbleibende Stück zusammengenommen so lang seyn müssen, als das ganze Band.

Daher sagt man mit Recht:
Der Subtrahend und der Rest zusammenaddirt, geben den Minuend.

Digitized by Google

§. 41.

Mehrziffrige Zahlen von mehrziffrigen zu subtrahiren.

Wie man eine einziffrige Zahl von einer größeren einziffrigen abzieht, ist Niemanden unbekannt, z. B.

8 — 3 = 5 3 — 1 = 2

9 — 7 = 2 u. s. w.

Auch unterliegt es gar keiner Schwierigkeit, eine einziffrige Zahl von einer zweiziffrigen abzuziehn, deren erste Ziffer 1 ist z. B.

12 — 5 = 7 17 — 9 = 8

19 — 8 = 11 10 — 3 = 7

u. s. w., nun werden wir aber sehen, daß sich die Subtraktion einer mehrziffrigen Zahl von einer mehrziffrigen auf die Subtraktion einer einziffrigen von einer einziffrigen oder einer einziffrigen von einer zweiziffrigen, deren erste Ziffer 1 ist, zurückführen läßt.

Man verfahre nämlich, um eine mehrziffrige Zahl von einer mehrziffrigen abzuziehen, wie folgt:

1) Man stelle den Subtrahend so unter den Minuend, daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, kurz alle gleichnamigen Einheiten-Klassen senkrecht unter einander zu stehen kommen, und ziehe zur Bequemlichkeit unter den Subtrahend einen Querstrich.

2) Nun subtrahire man Einer von Einern, Zehner von Zehnern, und schreibe die jedesmal übrigbleibenden Ziffern an die Stelle, die sie ihrem decadischen Werthe nach einnehmen. z. B. es soll die Zahl 82343 von der Zahl 95786 subtrahirt werden.

Minuend: 95786
Subtrahend: 82343
Differenz: 13443

Hier besteht nämlich sowohl der Minuend als der Subtrahend aus mehreren Theilen, nämlich aus Einern, Zehnern u. s. f. und unser beschriebenes Verfahren bestand darin, daß

Digitized by Google

jeder Theil des Subtrahends von einem gleichnamigen Theile des Minuends weggenommen wurde, wodurch denn offenbar, so wie erforderlich war, der ganze Subtrahend vom Minuend weggenommen wurde; so wie z. B. wenn von 18 Kronenthalern, 13 Preußenthalern und 6 Vierundzwanzigern weggenommen werden sollen: 7 Kronenthaler, 5 Preußenthaler und 2 Vierundzwanziger, man gewiß zum Ziele kommt, wenn man die Kronenthaler von den Kronenthalern, die Preußenthaler von den Preußenthalern u. s. f. wegnimmt.

§. 43.

Vom Entlehnen in der Subtraktion.

Es kann der Fall seyn, daß, obschon der ganze Minuend größer ist, als der Subtrahend, doch eine oder die andre Ziffer im Minuend kleiner ist, als die gleichnamige im Subtrahend. Sollte z. B. von der Zahl 5243 die Zahl 2871 abgezogen werden:

5243
2871

* * *

so könnte man wohl 1 Einheit von 3 Einheiten, nicht aber 7 Zehner von 4 Zehnern abziehen, und wenn solches statt findet, muß man es eben so machen, wie man verfährt, wenn man grobe Münzsorten hat, und Scheide-Münze zahlen soll.

Gesetzt, man habe 5 Vierundzwanziger und 2 Sechser, und soll 3 Sechser zahlen, nämlich:

	Vierundzwanziger	Sechser (4)
Minuend	5	2
Subtrahend		3
Differenz	4	3

so wird man einen Vierundzwanziger wegnehmen (entlehnen) und dafür dem Minuend 4 Sechser zulegen, wonach man die 3 Sechser leicht wegnehmen kann, so daß noch 4 Vierundzwanziger und 3 Sechser übrig bleiben.

Digitized by Google

Genau eben so verfährt man in ähnlichem Falle bei der Subtraktion im Allgemeinen mit unbenannten Zahlen. Sind nämlich im Minuend zu wenige Zehner, so entlehnt man einen Hunderter, was man durch einen über die Klasse der Hunderter gesetzten Punkt andeutet, und setzt dafür zehn Zehner zur Klasse der Zehner im Minuend, wonach man abziehen kann. Aehnlich verfährt man, wenn im Minuend zu wenige Hunderter, Tausender u. s. w. vorkommen, z. B.

	(10)	[10]		
	5	2	4	3
	2	8	7	1
	2	3	7	2

Der Punkt über dem 2 bedeutet, daß ein Hunderter weggenommen, und in 10 Zehner verwandelt worden ist, so wie der Punkt über dem 5 andeutet, daß ein Tausender weggenommen und in 10 Hunderter aufgelöst worden ist; das 2 gilt also nur 1 und das 5 nur 4.

§. 44.

Entlehnen über Nullen hinweg.

Auch kann sich's treffen, daß nicht Einer genug im Minuend da sind, um die Einer des Subtrahends wegnehmen zu können, und daß dabei im Minuend die Zehner, Hunderter ꝛc. ganz fehlen und etwa nur Tausender vorkommen. Der Minuend sey z. B. 3002 und der Subtrahend 2875.

Hier lassen sich 5 Einer von 2 Einern nicht abziehen, und doch kann man weder einen Zehner noch einen Hunderter entlehnen, weil beide Einheiten-Klassen ganz fehlen.

Man entnehme also einen Tausender, verwandle ihn in 10 Hunderter, von denen man 9 an dem Platze der Hunderter im Minuend stehen läßt, und einen in 10 Zehner umwechselt, von welchen man wieder neun an dem Platze der Zehner im Minuend setzt, und einen in 10 Einer verwandelt, die man zu den 2 im Minuend bereits vorkommenden Einern hinzusetzt, wonach man jedenfalls subtrahiren kann. Nämlich:

Digitized by Google

. 9 9 10	
3 0 0 2	Hier ist statt 3002 eigentlich gesetzt
2 8 7 5	2000 + 900 + 90 +
1 1 2 7	+ (10 + 2)

Addirt man diese Summanden, so erhält man wieder 3002:

2000
900
90
10
2
3002

daher die in der gewöhnlichen Rechenkunst vorkommende Regel:

Nullen, über welche hinweg man entlehnt, verwandeln sich in 9.

§. 45.

Einige Beispiele zur Anwendung:

1)		2)	
. (10) (10) (10)		. . . (9)	
3 2 5 6 4 3		4 3 7 5 4 0 2	
1 9 4 2 9 8		1 4 2 9 8 2 3	
1 3 1 3 4 5		2 9 4 5 5 7 9	

3)		4)	
. 9 9 9 .		. 9 9 9 . 9 9 (10) .	
2 3 0 0 0 2 7		1 0 0 0 2 0 0 3 2	
1 3 8 8		3 7 1 8 2 3 5	
2 2 9 8 6 3 9		9 6 2 0 1 7 9 7	

und so in andern Fällen.

Von der Multiplikation.

§. 46.

Multipliziren. Multiplikand. Multiplikator. Produkt. Faktoren.

Das Wort Multipliziren stammt von dem lateinischen multiplicare und heißt vervielfältigen.

Digitized by Google

Eine Zahl aber mit einer andern multipliziren, heißt die erstere so oft setzen, als die andere durch die Menge ihrer Einheiten anzeigt.

Die Zahl 8 z. B. mit der Zahl 3 multipliziren, heißt 8 dreimal setzen, wodurch man erhält 8 + 8 + 8 oder 24.

Man ersieht leicht, daß die Multiplikation sich von der Addition nur dadurch unterscheidet, daß, während in letzterer die Summanden ungleich seyn können, in der Multiplication lauter gleiche Summanden in ein Ganzes zusammengefaßt werden. Die Multiplikation ist also nur ein besonderer Fall der Addition.

Jene Zahl, welche so oft gesetzt, oder so vielmal genommen werden soll, als die andere durch die Menge ihrer Einheiten anzeigt, heißt Multiplikand (numerus multiplicandus, zu vervielfältigende Zahl).

Die Zahl, welche durch die Menge ihrer Einheiten anzeigt, wie vielmal der Multiplikand gesetzt werden soll, nennt man Multiplikator (numerus multiplicator, vervielfältigende Zahl).

Die Zahl endlich, welche zum Vorschein kommt, wenn man den Multiplikand so oftmal setzt, als der Multiplikator durch die Menge seiner Einheiten anzeigt, führt den Namen Produkt oder Facit (productum, das Hervorgebrachte).

Dem Multiplikand und Multiplikator gibt man auch den gemeinschaftlichen Namen Factoren.

§. 47.

Der Multiplikator muß eine unbenannte Zahl seyn.

Der Multiplikator zeigt nur an, wie oft der Multiplikand zu setzen sey; die Antwort auf die Frage: wie oft? ist aber immer eine unbenannte Zahl; nämlich einmal, zweimal, dreimal ꝛc. Deßhalb kann auch nie der Multiplikator eine benannte Zahl seyn. Wir können z. B. 5 fl. 3mal, 7mal ꝛc. nehmen, aber zu fordern, man solle 5 fl. dreipfennigmal oder 4 Ducatenmal nehmen, wäre ein Unsinn.

Digitized by Google

Der Multiplikand kann eine beliebige benannte Zahl seyn; und da das Produkt ein Vielfaches des Multiplikandes ist, so muß dasselbe die nämliche Benennung haben, wie der Multiplikand, z. B. 6 fl. mit 4 multiplizirt oder 4mal gesetzt, gibt 24 fl. Sechs Paar Pferde 5mal gesetzt, oder mit 5 multiplizirt, gibt 30 Paar Pferde.

§. 48.

Zeichen für die Multiplikation.

Das Zeichen für die Multiplikation ist ein schiefliegendes Kreuz $\times$ oder ein Punkt ., zwischen Multiplikand und Multiplikator gesetzt.

So bedeutet z. B. $8 \times 5 = 40$, daß 8 mit 5 multiplizirt, das Produkt 40 gibt. $8 . 5 = 40$ hat die nämliche Bedeutung. Da der Punkt ein bequemeres Zeichen ist, als das liegende Kreuz, so werden wir uns im Verlauf dieser Abhandlungen meistens des ersteren bedienen.

§. 49.

Das Einmal Eins.

Die Vielfachen, vom 1fachen bis zum 9fachen der neun ersten Zahlen lassen sich tabellarisch darstellen, und eine solche Darstellung nennt man das Einmaleins. Die bequemste Form desselben ist diejenige, welche man den Pythagorischen Rechentisch, von seinem angeblichen Erfinder Pythagoras nennt:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

In der obersten waagrechten Reihe stehen die einfachen Zahlen von 1 bis 9; in der zweiten waagrechten Reihe fin-

Digitized by Google

det man der Ordnung nach das Doppelte, in der dritten das Dreifache, in der achten das Achtfache derselben u. s. w.

In der ersten senkrechten Reihe, in welcher die Vielfachen von 1 stehen, findet man also immer die Zahl, welche anzeigt, das Wievielfache der ersten neun Zahlen in der zugehörigen waagrechten Reihe sich befindet.

Wo z. B. in der ersten senkrechten Reihe vorn die Zahl 5 steht, findet man die fünffachen, wo 7 steht, die Siebenfachen der neun ersten Zahlen. Gesetzt, man wollte wissen, wieviel siebenmal acht ist, so würde man in der obersten waagrechten Reihe die Zahl 8 aufsuchen, und von da, wo sie steht, senkrecht herabgehen bis zu der waagrechten Reihe wo die Siebenfachen der neun ersten Zahlen stehen. Daselbst findet man als Produkt die Zahl 56.

§. 50.

Bei unbenannten Zahlen ist die Ordnung der Faktoren gleichgültig.

Wenn Multiplikand und Multiplikator unbenannte Zahlen sind, so kann man den Multiplikator zum Multiplikand und umgekehrt machen; oder mit andern Worten, die Ordnung, in welcher die Faktoren auf einander Folgen, hat keinen Einfluß auf die Größe des Produktes.

So ist z. B. $6 \times 5 = 5 \times 6$ oder 6 fünfmal genommen ist eben so groß, als 5 sechsmal genommen. Der Satz, der an sich klar ist, findet an folgender bildlicher Darstellung nähere Erläuterung:

Dagegen würde man nicht sagen 5 fl. multiplizirt mit 3 geben das nämliche Produkt, wie 3 multiplizirt mit 5 fl., weil es ein Unsinn ist, mit 5 fl. multipliziren zu wollen. Es

Digitized by Google

gibt hier nur ein und nur auf einem Wege zu findendes Produkt; nämlich 15 fl.

§. 51.

Produkte aus mehr als zwei Faktoren.

Man kann auch ein aus zwei Faktoren bestehendes Produkt mit einer dritten, und das hiedurch zum Vorschein kommende neue Produkt mit einer vierten Zahl multipliziren. Z. B. das Produkt 2. 3 = 6 kann man wieder mit 4 multipliziren, was man so ausdrückt; 2. 3. 4 = 24, und auch dieß Produkt könnte man nochmals mit 5 multipliziren, nämlich: 2 . 3 . 4 . 5 = 120 u. s. w.

Es ist zu klarerer Einsicht in eine Rechnung öfters sehr vortheilhaft, derlei aus mehreren Faktoren bestehende Produkte im Verlaufe der Rechnung nicht wirklich zu bilden, sondern durch Aufführung der Faktoren mit Zwischensetzung des Zeichens . oder × nur anzudeuten, wie weiter unten zum Oeftern ersichtlich seyn wird.

§. 52.

Eine mehrziffrige Zahl mit einer einziffrigen zu multipliziren.

Man wird eine Zahl mit einer andern multipliziren, wenn man alle Theile der ersten so oft setzt, als die zweite durch die Menge ihrer Einheiten anzeigt, und sodann alle diese Theilprodukte in ein Ganzes zusammenfaßt. Man wird z. B. die Zahl 824 mit 6 multipliziren, wenn man jeden ihrer Theile sechsmal setzt, man erhält also 4 . 6 oder 24 Einheiten, 2 . 6 oder 12 Zehner und 8 . 6 oder 48 Hunderter. Demnach ist das richtige Produkt: 48 Hunderter + 12 Zehner + 24 Einer oder auch 4800 + 120 + 24 das ist:

4800
120
24

4944

Digitized by Google

Dieſes Verfahren, welches etwas umſtändlich iſt, könnte man abkürzen, wenn man die einzelnen Produkte im Anſchreiben gleich ſo unter einander ſetzte, daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner und ſo fort gleichnamige Einheiten-Klaſſen ſenkrecht unter einander zu ſtehen kämen, wie folgt:

8 2 4
× 6

2 4 . . . vier Einer und 2 Zehner
1 2 . . . . . 2 Zehner und 1 Hunderter.
4 8 . . . . . 8 Hunderter und 4 Tauſender; zuſammen:

4 Tauſender, 9 Hunderter, 4 Zehner und 4 Einer oder 4944, welches das verlangte Produkt iſt.

Noch einfacher könnte man verfahren, wie folgt:

Das Beiſpiel ſey wieder 824 × 6. Man ſetze den einziffrigen Multiplikator unter die hinterſte Ziffer des Multiplikand, und ziehe darunter einen Querſtrich:

824
6
4944

4 Einer, ſechsmal genommen, geben 24 Einer oder 4 Einer und 2 Zehner. Dieſe 4 Einer ſchreibe man im Produkte an den Platz der Einer, und die 2 Zehner behalte man noch im Gedächtniſſe.

Ferner: 2 Zehner, ſechsmal genommen, geben 12 Zehner, und die 2 vorhin zurückbehaltenen Zehner geben zuſammen 14 Zehner, d. i. 4 Zehner und 1 Hunderter. Die 4 Zehner ſetze man im Produkte an den Platz der Zehner und merke ſich den 1 Hunderter.

Endlich: 8 Hunderter ſechsmal genommen geben 48 Hunderter, und addirt man dazu den vorhin zurückgelaſſenen Hunderter, ſo hat man in allem 49 Hunderter oder 4 Tauſender und 9 Hunderter, und da nun alle Theile des Multiplikands ſechsmal geſetzt ſind, ſo iſt der ganze Multikand, wie verlangt wurde, mit 6 multiplizirt.

Digitized by Google

§. 53.

Eine mehrziffrige Zahl zehn, hundert, tausendmal ꝛc. größer zu machen.

Um eine beliebige mehrziffrige Zahl zehnmal größer zu machen, braucht man ihr zur Rechten nur ein Null anzuhängen. Nämlich 3480 ist zehnmal größer, als 348. Denn hängt man der Zahl 348 zur Rechten ein Null an, so werden aus den 8 Einern 8 Zehner, aus den 4 Zehnern 4 Hunderter u. s. w., es wird also jeder Theil der Zahl 348 zehnmal größer, mithin auch die ganze Zahl. Eben so ist:

$$3457 \times 10 = 34570$$
$$8003 \times 10 = 80030$$
$$400 \times 10 = 4000 \quad \text{u. s. w.}$$

Aus ähnlichen Gründen wird eine Zahl hundertmal größer, wenn man ihr zwei Nullen zur Rechten anhängt. Nämlich 72300 ist hundertmal größer als die Zahl 723. Denn vergleicht man die Zahlen 723 und 72300, so ersieht man, daß aus den Einern Hunderter, aus den Zehnern Tausender, kurz aus jedem Theile der Zahl ein hundertmal Größeres geworden ist. So z. B.

$$823 \times 100 = 82300$$
$$500 \times 100 = 50000$$

u. s. w. und aus demselben Grunde ist auch:

$$731 \times 1000 = 731000$$
$$82 \times 1000000 = 82000000 \quad \text{u. s. f.}$$

denn man löse zu noch näherer Erläuterung beide Zahlen: 731 und 731000 in ihre Theile auf, so ist:

$$731 = 700 + 30 + 1$$
$$731000 = 700000 + 30000 + 1000$$

§. 54.

Statt eine Zahl mit 5 zu multipliziren, kann man sie auch 3 + 2 oder zuerst mit 3 und dann mit 2 multipliziren.

Statt eine Zahl z. B. 9 fünfmal zu setzen, kann man sie, weil 5 aus den Theilen 3 und 2 besteht, zuerst mit 3

und hernach mit 2 multipliziren, und beide Produkte dann addiren. Nämlich:

$$9 \cdot 5 = 9 \cdot 3 + 9 \cdot 2 = 27 + 18 = 45$$

Wenn z. B. A heute 3 mal mehr und morgen 5 mal mehr Kaffee verkauft, als sein Nachbar B in Allem im Laden hat, so ist der zweitägige Verschleiß des Kaufmanns A 3 + 5 d. i. 8mal größer, als der ganze Vorrath des B.

Statt ferner eine Zahl mit einer andern aus zwei Faktoren bestehenden Zahl zu multipliziren, kann man sie zuerst mit dem einen Faktor und das Produkt, das herauskommt, mit dem andern Faktor multipliziren.

Um z. B. 12 mit 6 zu multipliziren, können wir, da $6 = 3 \cdot 2$ ist die Zahl 12 zuerst 3mal nehmen, wodurch wir erhalten: 36; dieses Produkt 36 müssen wir aber dann noch mit 2 multipliziren, so gewinnen wir das richtige Produkt 72.

Oder wenn ein Berg 15 mal höher ist, als ein Thurm, so müßte man die 3fache Thurm-Höhe fünfmal auf einander setzen, um die Höhe des Berges zu erhalten.

Dieß mußte vorausgeschickt werden, wenn uns das Verfahren bei der Multiplikation von mehrziffrigen Zahlen mit mehrziffrigen aus Gründen deutlich werden soll.

§. 55.

Eine Zahl mit einer andern von der Form: 4000, 800 ꝛc. zu multipliziren.

Soll eine Zahl z. B. 4326 mit 4000 multiplizirt werden, so setze man, da $4000 = 4 \times 1000$ ist, zuerst das Vierfache derselben, nämlich $4326 \times 4 = 17304$; dieses Produkt 17304 multiplizire man nun mit 1000 d. i. man hänge ihm 3 Nullen an, wodurch man erhält 17304000.

Eben so multiplizirt man 662 mit 800, indem man es zuerst mit 8 und das Herausgekommene mit 100 multiplizirt. Nämlich $662 \times 8 = 5296$ und $5296 \times 100 = 529600$.

Ueberhaupt multiplizirt man eine Zahl mit einer zweiten, welche letztere ausgedrückt ist durch eine Ziffer mit angehängten Nullen; wenn man die Zahl zuerst mit der einziffrigen Zahl multiplizirt und dem Produkte so viele Nullen zur Rechten anhängt, als deren im Ausdrucke des Multiplikators vorkommen. So ist z. B.

$72 \times 30 = 72 . 3 . 10 = 216 . 10 = 2160$
$184 \times 600 = 184 . 6 . 100 = 1104 . 100 = 110400$
$7238 \times 900 = 7238 . 9 . 1000 = 65142 . 1000 = 65142000$
u. s. f.

§. 56.

Eine mehrziffrige Zahl mit einer mehrziffrigen zu multipliziren.

Nun hat es keine Schwierigkeit mehr, die Gründe des Verfahrens deutlich einzusehen, welches man anwendet, um eine mehrziffrige Zahl mit einer mehrziffrigen zu multipliziren.

Soll z. B. die Zahl 3458 mit der Zahl 872 multiplizirt werden, so heißt das offenbar nichts anders, als: man soll die Zahl 3458 achthundertmal, zweimal und siebzigmal, oder besser geordnet: zweimal, siebzigmal und achthundertmal nehmen, und zuletzt alles in ein Ganzes zusammenfassen.

Nun ist aber:

	3458 × 2	=	6916
	3458 × 70	=	242060
und	3458 × 800	=	2766400
	Im Ganzen	=	3015376

Weniger umständlich hätte man auch folgender Weise verfahren können.

Multiplicand:	3458
Multiplicator:	872
	6916
	242060
	2766400
Product:	3015376

Digitized by Google

Beim zweiten Theil-Produkt hätte das eine und beim dritten die zwei am Ende angehängten Nullen nicht angeschrieben werden müssen, weil diese Nullen zuletzt in der Addition, die zur Bildung des Haupt-Produktes ausgeführt wird, keinen Werth haben; man konnte also auch setzen:

3458
872

6916
24206
27664

3015376

Daher die gewöhnlich für die Multiplikation gegebene Vorschrift rührt, man solle bei jeder neuen Multiplikation zur Bildung der Theil-Produkte eine Stelle nach Links einrücken; welche Regel aber im Gedächtnisse zu behalten unnöthig wird, sobald das Wesen der Multiplikation verstanden worden ist.

Man erkennt ferner, daß, wenn Multiplikand, Multiplikator, Theilprodukte und Haupt-Produkt gehörig unter einander gesetzt werden, so daß alle Einer, alle Zehner, Hunderter u. s. w. senkrecht unter einander stehen, jederzeit die hinterste Ziffer eines jeden Theil-Produktes senkrecht unter die Ziffer des Multiplikators gestellt werden muß, mit welchem eben multiplizirt worden ist. Denn es sey z. B. die dritte Ziffer des Multiplikators von Rechts nach Links gerechnet 8, so bedeutet dieses 8 nicht 8 Einer, sondern 800. Um nun das dritte Theil-Produkt zu gewinnen, muß man den Multiplikand mit 8 multipliziren und zwei Nullen anhängen, wodurch gewiß die hinterste von den geltenden Ziffern des dritten Theil-Produktes auch die dritte Stelle von Rechts nach Links hin einnimmt.

Es sey z. B. die Zahl 42484 mit der Zahl 8002 zu multipliziren, so heißt das, man soll 42484 zweimal und achttausendmal setzen. Man multiplizire also den Multiplikand zuerst mit 2, und schreibe die letzte Ziffer dieses ersten Theil-Produktes unter die Einer-Klasse. Sodann multiplizire man

Digitized by Google

den Multiplikand mit 8. Diesem Produkte muß man, da 8 nicht eigentlich 8, sondern 8000 bedeutet, drei Nullen anhängen. Statt dieses zu thun, weist man der letzten Ziffer desselben, die vierte Stelle von Rechts nach Links an, was die nämlichen Dienste thut, als ob man drei Nullen angehängt hätte. Nämlich:

Multiplicand: 42484
Multiplicator: 8002

84968
339872000

Product: 339956968

Man sieht, daß die letzte Ziffer 2 des zweiten Theil-Produktes senkrecht unter die Ziffer 8 des Multiplikators zu stehen kommt, mit welcher man den Multiplikand multipliziren mußte, um das zweite Theil-Produkt zu erhalten.

§. 57.

Verfahren, wenn der Multiplikator ausgedrückt ist durch geltende Ziffern mit angehängten Nullen.

Wenn der Multiplikator ausgedrückt ist durch eine Reihe von geltenden Ziffern mit Nullen am Ende, so stellt man sich vor, man habe blos mit den geltenden Ziffern die Multiplikation zu vollziehen, und die vernachläßigten Nullen hängt man zuletzt dem Produkte an.

Z. B. 38542 sey mit 37000 zu multipliciren:

38542
37000

269794
115626

1426054000

Der Grund dieses Verfahrens ist leicht einzusehen. Man soll mit 37000 multipliziren. Nun ist aber diese Zahl 37 mal 1000. Man multiplizirt also zuerst mit 37 und erhält das

Digitized by Google

Produkt 1426054, welches noch mit 1000 multiplizirt werden muß, was wirklich geschieht, wenn man 3 Nullen anhängt.

§. 58.

Verfahren, wenn Multiplikand und Multiplikator mit End-Nullen auftreten.

Wenn nicht nur der Multiplikator, sondern auch der Multiplikand jeder durch eine Reihe geltender Ziffern mit Nullen am Ende ausgedrückt ist, so vernachläßigt man anfangs diese End-Nullen und rechnet blos mit den geltenden Ziffern. Dem gefundenen Produkte hängt man aber zur rechten Hand so viele Nullen an, als im Multiplikand und Multiplikator zusammengenommen End-Nullen vorkamen; z. B. es soll die Zahl 38570000 mit 23000 multiplizirt werden, so verfahre man, wie folgt:

38570000
23000

11571
7714

887110000000

Denn würde man 3857 mit weggelassenen End-Nullen mit der Zahl 23000 multipliziren, so erhielte man 88711000. Dieses Produkt ist aber 10000mal zu klein, weil der wahre Multiplikand nicht 3857 sondern 38570000, man muß es also 10000mal größer machen, mithin noch 4 Nullen anhängen, so daß also das Produkt 887110000000 sieben End-Nullen erhält.

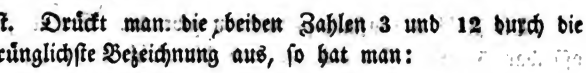
Von der Division.

§. 59.

Begriff der Division als besonderer Fall der Subtraktion.

Wenn wir fragen, wie oft eine Zahl 3 in einer andern Zahl 12 enthalten sey, so wünschen wir zu wissen, wie oft sich 3 aus 12 hinwegnehmen lasse, bis nichts mehr

da ist. Drückt man die beiden Zahlen 3 und 12 durch die ursprünglichste Bezeichnung aus, so hat man:



. . .
. . . für 12 und . . . für 3, und
. . .
. . .

man sieht auf den ersten Blick, daß die Zahl 3 in der Zahl 12 viermal enthalten ist.

Wie oft eine Zahl 7 in einer andern Zahl 35 enthalten sey, läßt sich am einfachsten dadurch ausmitteln, daß man 7 so oft von 35 subtrahirt, als es sich thun läßt, und abzählt, wie oftmal solches möglich war. Nämlich:

$$\left.\begin{array}{rcrl} 35 - 7 &=& 28 & \text{I.} \\ 28 - 7 &=& 21 & \text{II.} \\ 21 - 7 &=& 14 & \text{III.} \\ 14 - 7 &=& 7 & \text{IV.} \\ 7 - 7 &=& 0 & \text{V.} \end{array}\right\} \text{mal}$$

Demnach kann die Zahl 7 fünfmal aus der Zahl 35 weggenommen werden, sie ist also 5mal darin enthalten, was man auch so auszudrücken pflegt: 7 in 35 geht 5mal, nämlich die Subtraktion der Zahl 7 von der Zahl 35 geht 5mal an, woraus man denn sieht, daß die Division nichts anders ist, als ein besondrer Fall der Subtraktion.

§. 60.

Begriff der Division als Theilung und als Zerlegung in Faktoren.

Denkt man sich die Zahl 35 in sieben gleiche Theile zerlegt, so ist einer davon 5. Denn da sich 7 fünfmal von 35 wegnehmen läßt, so ist 35 fünfmal größer als sieben, und 7 ist daher der fünfte Theil von 35. Daher kann man auch sagen: eine Zahl durch eine andere dividiren, heißt die erstere in so viele gleiche Theile zerlegen, als die andere durch die Menge ihrer Einheiten anzeigt und einen dieser gleichen Theile setzen. Nämlich:

$$35 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7$$

also 35 dividirt durch 5, ist 7.

Digitized by Google

Die Zahl 6 fünfmal genommen gibt 30. Daher ist 30 offenbar 5mal größer als 6, und die Zahl 6 ist also fünfmal in 30 enthalten; und da auch 5 sechsmal genommen das nämliche Produkt 30 gibt, so ist 30 sechsmal größer als 5, und 5 geht also 6mal in 30. Wenn nämlich 5 . 6 = 30 so geht 5 sechsmal und 6 fünfmal in 30. Eine Zahl 35 durch eine andere 5 dividiren, heißt also auch, die Zahl 30 als ein aus zwei Faktoren bestehendes Produkt betrachten, deren einer 5 ist, und den andern Faktor suchen.

§. 61.

Dividend. Divisor. Quotient.

Die Zahl, in Bezug auf welche gefragt wird, wie oft die andere in ihr enthalten sey, nennt man Dividend (numerus dividendus, die zu theilende Zahl).

Wenn wir z. B. fragen, wie oft ist 6 in 24 enthalten? so ist 4 der Dividend.

Die Zahl, in Bezug auf welche gefragt wird, wie oftmal sie in einer andern enthalten sey, heißt Divisor (numerus divisor, theilende Zahl). Wenn man z. B. wissen will, wie oftmal 3 in 12 enhalten sey, so ist 3 der Divisor.

Die Zahl endlich, welche durch die Menge ihrer Einheiten anzeigt, wie oftmal der Divisor im Dividend enthalten ist, führt den Namen Quotient oder Quotus, (quota pars, der wie vielte Theil?) z. B. wenn 8 in 24 dreimal enthalten ist, so ist 24 der Dividend, 8 der Divisor und 3 der Quotient.

§. 62.

Zeichen für die Division.

Um auszudrücken, daß eine Zahl durch eine andere dividirt werden soll, hat man zweierlei Zeichen, von denen man das eine oder das andere nach Belieben anwenden kann; nämlich den Doppelpunkt :, den man so zwischen den Dividend und Divisor stellt, daß ersterer links und letzterer rechts von

Digitized by Google

demſelben ſteht; nämlich der Ausdruck 24 : 8 = 3 bedeutet, daß, wenn man 24 durch 8 dividirt, die Zahl 3 der Quotus iſt. Oder man bedient ſich des Queerſtriches, den man ſo zwiſchen Dividend und Diviſor ſetzt, daß der Dividend oberhalb, der Diviſor unterhalb deſſelben ſeinen Platz einnimmt. Nämlich: $\frac{48}{6} = 8$ bezeichnet, daß 48 durch 6 dividirt, den Quotienten 8 gibt. Welches von beiden Zeichen man anwenden will, iſt gleichgültig.

§. 63.

Reſt bei der Diviſion.

Nicht immer kann man ganz genau angeben, wie oft eine Zahl in einer andern enthalten ſey, oder wie oft man eine von der andern wegnehmen könne. Geſetzt, es werde gefragt: Wie oft iſt 3 in 11 enthalten?

. . .
. . . (11) und . . . (3)
. . .
. .

Hier kann man wohl mit Recht behaupten, daß 3 in 11 dreimal enthalten ſey, aber der Dividend 11 wird nicht ganz erſchöpft, wenn man die Zahl 3 dreimal davon wegnimmt, indem noch der Reſt 2 bleibt, der aber offenbar kleiner ſeyn muß, als der Diviſor 3, weil auſſerdem 3 nicht 3mal, ſondern einmal öfter enthalten ſeyn würde. So iſt z. B. 4 in 13 dreimal enthalten, aber es bleibt der Reſt 1, und ſo in andern Fällen.

§. 64.

Prüfung des Quotienten.

Wenn man behauptet, daß eine Zahl 5 in einer andern Zahl 30 ſechsmal enthalten ſey, ſo muß ſich dieſe Behauptung dadurch beſtätigen, daß 5 ſechsmal geſetzt, oder 5 mit 6 multiplizirt, wirklich 30 gibt. Geſetzt, wir wollten ſagen: 5 iſt in 30 ſiebenmal enthalten, ſo wäre dieß eine Unwahrheit,

Digitized by Google

weil sich 5 nicht siebenmal aus 30 wegnehmen läßt, indem 5 siebenmal gesetzt, nicht 30, sondern 35 gibt.

Wenn es uns dagegen belieben würde, zu sagen, 2 sey in 12 dreimal enthalten, so würde uns Niemand der Unwahrheit zeihen können; denn nichts ist gewisser, als daß 2 in 12 dreimal enthalten ist, indem man 2 wirklich dreimal von 12 wegnehmen kann. Wenn aber gefragt wird, wie oft höchstens 2 in 12 enthalten sey, dann müssen wir freilich sagen, 6mal.

Will man sich demnach von der Richtigkeit eines gefundenen Quotienten überzeugen, so multiplizire man ihn mit dem Divisor, und ziehe das Produkt vom Dividend ab; bleibt nichts übrig, so ist der Quotient genau gefunden. Z. B.

$36 : 9 = 4$; $9 . 4 = 36$ also der Quotient genau 4.

Ist der Rest kleiner, als der Divisor, so hat man zwar den Quotienten nicht ganz genau, aber der Fehler beträgt doch keine ganze Einheit, z. B.

$$18 : 5 = 3 \text{ und } 5 \times 3 = 15$$

Der Quotus 3 ist also etwas zu klein, doch dürfte er nicht 4 seyn, weil 5×4 schon 20 wäre.

Ist endlich der Rest größer, als der Divisor, so erkennt man, daß der Quotus um mindestens eine Einheit zu klein ist, z. B. $24 : 3 = 7$; $3 \times 7 = 21$

Hier hätte sich 3 achtmal aus 24 nehmen lassen, und es ist demnach $24 : 3 = 8$.

§. 65.

Bestimmung des Quotienten, wenn der Dividend, oder der Divisor, oder beide benannte Zahlen sind.

Wir können entweder fragen: Wie oftmal lassen sich 3 fl. von 24 fl. wegnehmen, und dann müssen wir antworten: 8mal. Auf die Frage dagegen, wie oftmal 3 Eimer in 15 Meilen enthalten sind, könnten wir gar nicht antworten. Sind also Dividend und Divisor benannte Zahlen, so müssen Beide Ausdrücke der nämlichen Einheit, oder mit andern Worten, sie müssen von gleicher Benennung seyn, ausserdem eine Division gar nicht möglich ist.

Digitized by Google

Wenn aber Dividend und Divisor benannte Zahlen sind, so ist nothwendig der Quotient eine unbenannte Zahl; denn der Divisor mit dem Quotient multiplizirt, muß den Dividend wieder geben. Der Divisor ist eine benannte Zahl, wäre es nun auch der Quotient, so müßte hier eine benannte Zahl mit einer benannten multiplizirt werden, was nach den Gesetzen der Multiplikation nicht möglich ist, z. B.

18 Schuh : 3 Schuh = 6

d. i. 3 Schuh sind in 18 Schuh 6mal enthalten, und wenn das wahr seyn soll, so müssen 3 Schuh sechsmal gesetzt 18 Schuh geben.

Es kann aber auch gefordert werden, man soll 36 fl. in drei gleiche Theile theilen; und es ist hienach

36 fl. : 3 = 12 fl.

Hier ist der Quotient eine Zahl von der nämlichen Benennung, wie der Dividend. Doch ist es gar nicht nöthig, daß hier ein anderer Begriff von der Division gegeben werde, als im vorigen Fall, denn wenn gefragt wird, wie viele fl. der dritte Theil von 36 fl. sind, so hat man nur auszumitteln, wie oft sich die unbenannte Zahl 3 von der unbenannten Zahl 36 wegnehmen lasse. Die Antwort ist: 12mal. Daraus geht hervor, daß 3 zwölfmal größer ist, als 36, daß also 12 Einheiten der dritte Theil von 36 Einheiten, also 12 fl. der dritte Theil von 36 fl.

oder 36 fl. : 3 = 12 fl. ist.

Uebersichtlich gelten also folgende Gesetze:

1) Wenn Dividend und Divisor benannt sind, so müssen sie gleiche Benennung haben, und der Quotient ist eine unbenannte Zahl.

2) Wenn der Dividend benannt, und der Divisor unbenannt ist, so hat der Quotient dieselbe Benennung wie der Dividend.

3) Wenn Dividend und Divisor unbenannt sind, so ist es auch der Quotient.

Digitized by Google

§. 66.

Ein Ganzes wird durch eine Zahl dividirt, wenn alle seine Theile durch diese Zahl dividirt werden.

Wenn wir eine Summe Geldes, welche in 8 Kronenthalern, 12 Preußenthalern und 6 Zwölfern besteht, durch 2 dividiren oder halbiren sollen, so erreichen wir unsern Zweck, wenn wir die Hälfte der Kronenthaler, die Hälfte der Preußenthaler und die Hälfte der Zwölfer setzen; nämlich: 4 Kronenth., 6 Preußenth. und 3 Zwölfer. Sollen wir nämlich eine aus mehreren Theilen bestehende Zahl durch eine unbenannte Zahl dividiren, z. B. durch 6, so brauchen wir blos jeden der einzelnen Theile durch 6 zu dividiren, und diese Quotienten dann zusammenzufassen, z. B.

(8 Einer + 16 Zehner) : 4 = 2 E. + 4 Z.

Oder: $8462 : 2 = \frac{8000}{2} + \frac{400}{2} + \frac{60}{2} + \frac{2}{2}$

$= 4000 + 200 + 30 + 1 =$

$= 4231$

§. 67.

Eine mehrziffrige Zahl durch eine einziffrige zu dividiren.

Soll eine mehrziffrige Zahl durch eine einziffrige Zahl dividirt werden, so verfährt man, wie folgt: Der Dividend sey 8545 und der Divisor sey 5.

1) Man setze der Bequemlichkeit halber den Divisor vor den Dividend und trenne beide durch einen senkrechten Strich:

Divisor	Dividend	Quotus
5	8545	****

Hinter den Dividend schreibe man den zu findenden Quotus an, und trenne ihn ebenfalls durch einen senkrechten Strich vom Dividend.

2) Nun sage man: 5 in 8 tausend ist tausendmal enthalten. Um sich von der Richtigkeit des Quotienten zu überzeugen, setze man den Divisor 5 wirklich tausendmal, ziehe dieses Produkt vom Dividend ab, so bleibt noch 3545 übrig.

Digitized by Google

3) Nun sage man: 5 in 35 hundert ist 700mal enthalten, was der zweite Theil des Quotienten ist, und um dessen Richtigkeit zu beurkunden, nehme man 5 wirklich 700mal und subtrahiere das Produkt 3500 von dem Reste 3545. Es bleibt noch 45 übrig.

4) Diesen Rest dividire man wieder durch 5, so erhält man den nächsten Theil des Quotienten, nämlich 9; denn 5 neunmal genommen ist 45. Dieses Produkt 45 ziehe man von letzten Reste 45 ab; es bleibt nichts übrig; der Divisor 5 ist mithin so oft als thunlich aus dem Dividend 8545 genommen, und die Division demnach vollendet.

5) Endlich faße man die drei Theile des Quotienten in eine Summe zusammen, so ist die Rechnungs-Operation vollständig ausgeführt, nämlich:

	5 | 8545	1000	5 in 8000
5 . 1000 =	5000	700	5 in 3500
Rest . . =	3545	9	5 in 45
5 . 700 . . . =	3500		
Rest	45		
5 . 9 . . . =	45		
Rest	0		

Auf ähnliche Weise könnte man auch bei jeder Rechnung der Art verfahren; man pflegt jedoch der Kürze halber die End-Nullen der einzelnen Theile des Quotienten und der einzelnen Produkte wegzulassen, indem hiedurch der Quotient durchaus keine Aenderung erleidet. z. B.

Es sey 61138 durch 7 zu dividiren:

7 |	61138	8000	und kürzer	7 |	61,1,3,8	8734
	56000	700			56 : : :	
	5138	30			51 : :	
	4900	4			49 : :	
	238				23 :	
	210				21 :	
	28				28	
	28				28	
	0				0	

Digitized by Google

§. 68.

Division einer mehrziffrigen Zahl durch eine mehrziffrige.

Soll eine mehrziffrige Zahl durch eine mehrziffrige dividirt werden, so stützt sich das anzuwendende Verfahren auf die nämlichen Gründe: Man sucht nämlich auszumitteln, wie oftmal sich der Divisor vom Dividend wegnehmen läßt, bis letzterer erschöpft ist.

Z. B. 9024 werde durch 24 dividirt:

24	9024	300 . .	. .	9000 : 24
	7200	70 . .	. .	1820 : 24
	1824	6 . .	.	144 : 24
	1680			
	144			
	144			
	0			

Man fragt nämlich zuerst:

Wie oftmal ist 24 in 90 hundert enthalten. Die Antwort ist 300mal.

Setzt man den Divisor 24 wirklich 300mal, so erhält man 7200, welches Produkt von dem ganzen Dividend 9024 weggenommen, noch 1824 als Rest übrig läßt. Da hienach der Dividend noch nicht erschöpft ist, so stellt man die fernere Frage: Wie oft ist 24 in 1824 oder in 182 zehn (zich) enthalten. Die Antwort ist 7zichmal. Man setzt, um die Wahrheit dieser Antwort zu beurkunden, den Divisor 24 wirklich 70mal, das Produkt 1680 zieht man vom vorigen Reste 1824 ab, und es bleibt noch 144 als Rest, in welchem 24 sechsmal enthalten ist. Da man nun allmählig den Divisor 300mal, 70mal und 6 gesetzt und vom Dividend weggenommen hat, so ist er im Ganzen 375mal im Dividend enthalten und zwar genau, weil nach diesen drei Wegnahmen gar nichts mehr vom Dividend übriggeblieben ist.

Digitized by Google

Kürzer hätte man so verfahren:

```
24 | 90,2,4 | 376
   | 72:    |
   |--------|
   | 182:   |
   | 168:   |
   |--------|
   |  144   |
   |  144   |
   |--------|
   |    0   |
```

Von den Proben über die Stammrechnungs-Arten.

§. 69.

Was man unter Probe versteht.

Unter Probe für irgend eine Rechnung versteht man eine zweite Rechnung, durch welche ausgekundschaftet wird, ob sich in die erste kein Fehler eingeschlichen habe. Durch eine Probe wird also keineswegs untersucht, ob man nach richtigen Prinzipien gerechnet habe, sondern man sieht blos nach, ob man nicht in der Ausführung irrte. Da man sich meistens eben so leicht in der Probe, als in der Rechnung selbst irren kann, so gibt erstere, wenn sie zutrifft, nur hohe Wahrscheinlichkeit, und, wenigstens bei sehr weitläufigen Berechnungen, nicht vollständige Gewißheit. Trifft aber die Probe nicht ein, so sind wir immer noch im Unklaren, ob wir in der Rechnung oder in der Probe gefehlt haben, sondern wissen nur so viel, daß irgend wo ein Irrthum vorgegangen ist.

§. 70.

Probe über die Addition.

Gesetzt, wir hätten fünf Bandstücke in ein einziges Band zusammengefügt, und schnitten nun auf einen Schnitt vier davon vom ganzen Bande ab, so müßte offenbar das fünfte Stück übrig bleiben. Oder, was dasselbe ist, wenn wir fünf Zahlen z. B. 3, 7, 9, 5, 2 in ein Ganzes vereinigen d. i. addiren, und von der Summe 3 + 7 + 9 + 5 + 2 oder von 26 vier von diesen Summanden z. B. 7 + 9 + 5 + 2

Digitized by Google

d. i. 23 wegnehmen, so müssen wir offenbar den Summanden 3, den wir bei Bildung der zweiten Summe vernachlässigt hatten, wieder als Rest erhalten.

Daher gibt man, um die Probe über richtige Ausführung einer Addition anzustellen, folgende Regel:

Man lasse einen beliebigen von den Summanden weg, fasse die übrigen in eine Summe zusammen, und subtrahire diese von der zu untersuchenden Haupt-Summe, so muß der weggestrichene Summande wieder zum Vorschein kommen, z. B.

32457	Summanden	. . . . weggestrichener Summande
3982		
78001		
22		
327		
114789		Haupt-Summe.
82332		Summe der übrigen Summandene
Rest 32457		weggestrichener Summand.

Man kann daher volles praktisches Zutrauen haben, daß 114789 die richtige Summe ist.

§. 71.

Probe über die Subtraktion.

Wer früh beim Ausgehen irgend eine Summe Geldes z. B. 13 fl. zu sich steckte, und während des Tages mehrere Ausgaben macht, hat gewissermassen eine Subtraktion vorgenommen; das am Morgen eingesteckte Geld ist der Minuend, die Ausgabe während des Tages bildet den Subtrahend, und was er am Abend noch in der Tasche hat, ist der Rest oder die Differenz. Nun ist aber gewiß ganz klar, daß das ausgegebene Geld mit dem, was er am Abend noch in der Tasche hat, nicht mehr und nicht weniger ausmachen, als die am Morgen eingesteckte Geld-Summe.

Oder schneidet man von einer Schnur ein Stück herab, so ist wohl Niemand im Zweifel, daß der abgeschnittene Theil

(Subtrahend) und der übrigbleibende Theil (Rest) zusammengesetzt, die ganze Schnur-Länge (Minuend) wiedergeben müssen. Daher die Vorschrift: Um die Probe über die Subtraktion zu machen, addire man den Subtrahend und den Rest zusammen, so muß, wenn kein Rechnungsfehler vorfiel, der Minuend zum Vorschein kommen. z. B.

Minuend: 378927
Subtrahend: 297038
Rest: . . . 81889
378927 Summe des Subtrahends und Rest.

§. 72.

Probe über die Multiplikation.

Wenn wir irgend eine Zahl z. B. 12 mit 6 multipliziren, so machen wir sie sechsmal größer und erhalten das Produkt 72. Daher ist 12 in 72 genau 6mal enthalten; wie noch anschaulicher aus folgender Darstellung hervorgeht:

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

12 sechsmal genommen gibt 72 oder 12 × 6 = 72

12 ist hier der Multiplikand, 6 der Multiplikator, 72 das Produkt, und man sieht leicht ein, daß der Multiplikand 12 so oftmal im Produkt enthalten ist, als der Multiplikator durch die Menge seiner Einheiten anzeigt, nämlich 6mal; oder mit andern Worten: daß das Produkt dividirt durch den Multiplikand den Multiplikator als Quotus wiedergeben muß, d. i. wenn

12 × 6 = 72 so ist
72 : 12 = 6

Aber man gewinnt auch das nämliche Produkt 72, wenn man statt 12 sechsmal zu nehmen, dafür 6 zwölfmal nimmt:

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

6 zwölfmal genommen gibt 72 oder 6 × 12 = 72.

Digitized by Google

Offenbar ist hier 6 zwölfmal in 72 enthalten, d. i. wenn 6×12 oder was das nämliche ist, wenn $12 \times 6 = 72$ so ist $72 : 6 = 12$, d. i. wenn man das Produkt durch den Multiplikator dividirt, so erhält man den Multiplikand; oder kürzer: wenn man ein Produkt durch einen der beiden Faktoren dividirt, so kömmt der andere zum Vorschein, nämlich:

wenn $6 \cdot 12 = 72$
so ist $72 : 6 = 12$
und $72 : 12 = 6$

Daher die Vorschrift:

Man macht die Probe über die Multiplikation, indem man das Produkt durch den Multiplikand dividirt, und man wird, falls kein Rechnungs-Fehler vorfiel, den Multiplikator erhalten; oder indem man das Produkt durch den Multiplikator dividirt, worauf unter der eben ausgesprochenen Bedingung der Multiplikand zum Vorschein kommen muß.

Z. B. es sey 573 mit 241 zu multipliziren.

		Probe.	
573		573 | 1380,9,3,	241
241		1146 : :	
573		2349 :	
2292		2292 :	
1146		573	
138093		573	
		0	

Hätte man das Produkt 138093 durch 241 dividirt, so würde 573 der Quotient gewesen seyn.

§. 73.

Probe über die Division.

Wenn die Behauptung, die Zahl 5 sey in 40 achtmal enthalten, richtig ist, so muß 5 wirklich 8mal gesetzt, oder mit 8 multiplizirt, die Zahl 40 geben. Nun tritt hier 40 als Dividend, 5 als Divisor und 8 als Quotient auf, man kann sich also auch so ausdrücken: Der Divisor multiplizirt mit dem Quotienten muß nothwendig den Dividend wiedergeben, d. i. wenn $\frac{40}{5} = 8$ so ist $5 \cdot 8 = 40$.

Digitized by Google

Wir wollen uns die Sache noch an einem Bilde veranschaulichen: Wenn der Inhalt eines Kruges zwanzigmal in dem Inhalte eines Fasses enthalten seyn soll, so muß das Wasser, welches der Krug faßt, 20mal in das Faß geschüttet, dasselbe eben voll machen.

Man macht daher die Probe über die Division, wenn man den Divisor mit dem Quotienten multiplizirt. Ist kein Rechnungs-Fehler begangen worden und ist der Quotus ganz vollständig und genau angegeben, so muß der Dividend zum Vorschein kommen.

Wenn man aber fragt, wie oft 6 in 58 enthalten sey, so ist die Antwort: 9mal mit dem Bemerken, daß vom Dividend 58 noch 4 übrig bleiben. Multiplizirt man daher 6 mit 9, so bekommt man nicht 58, sondern nur 54 und man muß, um den ganzen Dividend zu gewinnen, zum Produkte 6 . 9 noch den Rest 4 addiren. Daher die Vorschrift: Um die Probe über die Division zu machen, multiplizire man den Divisor mit dem Quotienten und addire den Rest dazu, so erhält man, wenn die Division richtig ausgeführt war, den Dividend wieder. Z. B. es werde 35728 durch 37 dividirt:

```
37 | 3 5 7,2,8, | 965
   | 3 3 3      |
     -----      |
       2 4 2    |
       2 2 2    |
     ---------
         2 0 8
         1 8 5
     ---------
Rest       2 3
        Probe.
         9 6 5
           3 7
     ---------
       6 7 5 5
     2 8 9 5
     ---------
     3 5 7 0 5
       +   2 3
     ---------
     3 5 7 2 8
```

Die Division war also richtig ausgeführt.

Digitized by Google

Veränderungen, welche ein Produkt erleidet, wenn man einen oder einige seiner Faktoren ändert.

§. 74.

Aus Vergrößerung oder Verkleinerung eines Faktors folgt gleiche Vergrößerung oder Verkleinerung des Produktes.

Wir wollen uns vorstellen, die Buchstaben a und b mögen zwei beliebige Zahlen bedeuten, so wird durch a.b das Produkt dieser beiden Zahlen bezeichnet. Die Zahl a stelle den Multiplikand und die Zahl b den Multiplikator dar; so werden folgende Behauptungen als wahr anerkannt werden:

1) Wird der Multiplikand a drei-, vier- oder zehnmal größer, während der Multiplikator b unverändert bleibt, so wird hiedurch auch das ganze Produkt drei-, vier- oder zehnmal größer. Denn ein zehnmaliges a (welche Zahl auch a bedeuten mag) bmal gesetzt, muß doch offenbar einen zehnmal größeren Werth haben, als das einfache a, wenn es bmal gesetzt wird. Wenn z. B. $8 \times 3 = 24$

so ist (siebenmal 8) $\times$ 3 = (siebenmal 24)

Sechs Stunden mit 9 multiplizirt, gibt 54 Stunden; aber sechs Tage mit dem nämlichen 9 multiplizirt muß eine 24mal größere Zeit geben, weil der Multiplikand: Sechs Tage 24mal größer ist, als der Multiplikand: 6 Stunden.

2) Läßt man den Multiplikand a ungeändert, macht aber den Multiplikator 2-, 3- oder 5mal größer, so wird auch das Produkt eben so vielmal größer, als der Multiplikator.

Wenn nämlich der Multiplikator 5mal größer wird, so ist das ein Zeichen, daß der Multiplikand a fünfmal öfter gesetzt werden soll, es muß also offenbar ein 5mal größeres Produkt herauskommen.

Z. B. $20 \times 7 = 140$

also 20 $\times$ (fünfmal 7) = (fünfmal 140.)

Man ersieht hieraus, daß wenn von den beiden Faktoren, aus welchen ein Produkt gebildet ist, einer drei- vier-

Digitized by Google

oder fünfmal größer wird, auch das Produkt eine eben so vielmalige Vergrößerung gewinnt.

3) Aus ganz ähnlichen Gründen wird ein Produkt drei, vier- oder fünfmal kleiner, wenn der Multiplikand oder der Multiplikator, überhaupt einer von den beiden Faktoren so vielmal kleiner wird.

4) Wenn der Multiplikand sechsmal größer und der Multiplikator gleichzeitig sechsmal kleiner wird, oder umgekehrt, so erleidet das Produkt gar keine Veränderung. Wenn z. B. $8 \times 4 = 32$ so ist das doppelte von 8 multiplizirt mit der Hälfte von 4 ebenfalls 32; nämlich $16 \times 2 = 32$. Es versteht sich von selbst, daß man statt 6 oben jede andre Zahl hätte setzen können.

5) Wird der Multiplikand fünfmal, und der Multiplikator zugleich sechsmal größer, so wird das Produkt 5mal 6mal d. ist. 30mal größer. Wenn z. B. $3 \times 2 = 6$ so ist (fünfmal 3) $\times$ (sechsmal 2) = (dreißigmal 6.) Es ist klar, daß statt 5 und 6 je zwei beliebige andre Zahlen gesetzt werden konnten.

6) Wird der Multiplikand 24mal größer und der Multiplikator gleichzeitig 6mal kleiner, so wird offenbar nach diesen beiden Veränderungen das Produkt größer geworden sein, und zwar so vielmal größer, als 24 größer ist, denn 6, nämlich 4mal. Statt 24 und 6 hätte man je zwei andere Zahlen setzen können.

Der umgekehrte Fall würde stattfinden, wenn der Multiplikand 24mal kleiner und der Multiplikator 6mal größer geworden wäre.

7) Wenn ein Produkt aus mehreren Faktoren besteht, und es wird ein einziger davon drei-, vier- oder fünfmal größer so wird das ganze Produkt eben so vielmal größer.

Wenn z. B. $5 . 4 . 2 = 50$, so ist (zehnmal 5) $\times$ $4 . 2 =$ zehnmal 50; denn man kann hier 5 als den Multiplikand, $4 . 2$ aber, nämlich die beiden andern Faktoren als

Digitized by Google

den Multiplikator ansehen. Nun haben wir aber bereits gesehen, daß ein Produkt 3, 4 oder 5 mal größer wird.

Aus ähnlichen Gründen wird das ganze Produkt soviel mal kleiner, als einer seiner Faktoren kleiner wird u. s. f.

Veränderungen, welche ein Quotient erleidet, wenn entweder der Dividend oder der Divisor oder beide verändert werden.

§. 75.

Der Quotient ändert sich gerade wie der Dividend und verkehrt wie der Divisor.

1) Der Quotient wird eben so vielmal größer, so vielmal der Dividend größer wird; dann sicher ist irgend ein Divisor in einem sechsmal größeren Dividend auch sechsmal öfter enthalten. Wenn z. B.

8 : 2 = 4 so ist (sechsmal 8) : 2 = (sechsmal 4)

Aus dem nämlichen Grunde wird auch ein Quotient sechsmal kleiner, wenn der Dividend sechsmal kleiner wird. Begreiflich könnte man statt 6 jede beliebige andere Zahl setzen.

2) Wenn der Divisor 3, 4 oder 5 mal größer wird, so wird der Quotus eben so vielmal kleiner, denn offenbar ist ein sechsmal größerer Divisor sechsmal seltener im Dividend enthalten. Wenn nämlich:

48 : 2 = 24

so ist 48 : (8mal 2) = dem achten Theile von 24

Aus ähnlichen Gründen hat eine Verkleinerung des Divisors eine eben so vielmalige Vergrößerung des Quotienten zur Folge. Wenn z. B.

48 : 8 = 6, so ist

48 dividirt durch den vierten Theil von 8 gleich dem vierfachen 6, denn ein 4 mal kleinerer Divisor ist natürlich 4mal öfter im Dividend enthalten.

3) Wenn man den Dividend und Divisor jeden gleich vielmal größer macht, so wird dadurch der Werth des Quotienten nicht verändert.

Digitized by Google

Denn vergrößert man z. B. den Dividend 4mal, so wird wohl dadurch der Quotus 4mal größer, macht man nun auch den Divisor 4mal größer, so wird der so eben 4mal vergrößerte Quotus wieder 4mal kleiner, ist also wieder auf seinen vorigen Werth gekommen.

Wenn nämlich:

$$27 : 9 = 3$$

so ist auch (viermal 27) : (viermal 9) = 3

Eben so bleibt ein Quotient umgeändert, wenn man Dividend und Divisor gleichvielmal kleiner macht; wenn nämlich 27 : 9 = 3 ist, gibt auch der dritte Theil von 27 dividirt durch den dritten Theil von 9 dem nämlichen Quotienten 3, nämlich: 9 : 3 = 3.

4) Vergrößert man Dividend und Divisor, ersteren aber mehr als letztern, so wird der Quotus größer; im umgekehrten Falle kleiner; wie sich aus dem oben Angeführten leicht ergibt.

Digitized by Google

IV. Abſchnitt.

Von den gemeinen Brüchen.

§. 76.

Theilung eines Ganzen.

Jedes Ganze kann man ſich in irgend eine Anzahl gleicher Theile getheilt denken, worauf man nun einen oder einige dieſer gleichen Theile ſetzen und beſonders betrachten und benennen kann.

Theilt man nämlich ein Ganzes in zwei gleiche Theile, ſo nennt man jeden ſolchen Theil ein Halbes; theilt man das Ganze in drei gleiche Theile, ſo nennt man jeden derſelben ein Drittel des Ganzen; und ſo fort erhält man Viertel, Fünftel, Tauſendel, Milliontel u. ſ. w. je nachdem man das Ganze in vier, fünf, Tauſend, oder eine Million gleicher Theile theilt.

Ein Halbes: $\frac{1}{2}$

Ein Drittel: $\frac{1}{3}$

Ein Tauſendel: $\frac{1}{1000}$ u. ſ. f.

§. 77.

Werth eines oder mehrerer Theile.

Wenn man den Werth des Ganzen kennt, ſo kann man auch den Werth des Halben, des Drittel, Viertel, Tauſendel beurtheilen. So hat z. B. ein Halbes des Gulden den Werth 30 Kreuzer, ein Drittel Gulden den Werth 20 kr., ein Zehntel den Werth 6 Kr. u. ſ. w.

Haben wir ferner einmal den Werth von $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{100}$ des Ganzen kennen gelernt, ſo wiſſen wir auch was 2 Fünftel,

Digitized by Google

oder 4 Sechstel oder 60 Hundertel werth sind. Wenn z. B. ein Fünftel Gulden den Werth 12 Kreuzer hat, so sind 3 Fünftels Gulden 3mal 12 Kreuzer das ist 36 Kr. werth.

So ist der Sechstel Schuh so viel werth als 2 Zoll, wenn man 12 Zoll auf den Schuh rechnet, mithin haben 5 Sechstel Schuh den Werth 5mal 2 Zoll, oder 10 Zoll.

§. 78.

Bruch. Zähler. Nenner. Bezeichnung.

Denkt man sich nun ein Ganzes in zwei oder mehrere gleiche Theile getheilt, und einen oder einige davon gesetzt, so nennt man den Ausdruck einer solchen Menge gleicher Theile einen Bruch.

Um einen Bruch zu kennen, muß man zweierlei wissen, nämlich:

a) in wie viele gleiche Theile das Ganze getheilt ist, und

b) wie viele von diesen gleichen Theilen gesetzt werden sollen.

Die Zahl, welche angibt oder nennt, in wie viele gleiche Theile das Ganze getheilt ist, heißt Nenner, und die Zahl, welche angibt, oder zählt, wie viele von diesen gleichen Theilen gesetzt worden sind, heißt Zähler des Bruches.

Um einen Bruch auszudrücken, schreibt man den Zähler oberhalb und den Nenner unterhalb eines waagrechten Querstriches. So bezeichnet z. B. $\frac{3}{4}$ den Bruch drei Viertel. Das Ganze ist nämlich in 4 gleiche Theile getheilt, und davon sind 3 gesetzt. $\frac{17}{24}$ Siebzehn Vierundzwanzigstel. Hier ist das Ganze in 24 gleiche Theile getheilt, und 17 davon sind gesetzt.

Man ersieht leicht, daß der Nenner die Anzahl aller Theile, in welche das Ganze getheilt worden ist, der Zähler aber nur die Anzahl der im Ausdrucke des Bruches ge-

Digitized by Google

ſetzten Theile angibt. Im Bruche $\frac{4}{7}$ z. B. gibt der Nenner an, daß die Anzahl aller Theile 7, und der Zähler, daß die Anzahl der hievon geſetzten Theile 4 ſey.

§. 79.

Uneigentliche — Eigentliche Brüche.

Theilt man ein Ganzes in eine beliebige Anzahl gleicher Theile und ſetzt ſie alle, ſo daß alſo der Nenner dem Zähler gleich wird, ſo erhält man einen Bruch, der offenbar eben ſo viel werth iſt, als das Ganze. So geben z. B. zehn Zehntels Gulden einen ganzen Gulden, zwölf Zwölftels Schuh einen ganzen Schuh.

Wenn aber von den Theilen, in welche das Ganze getheilt wurde und deren Menge der Nenner angibt, nicht alle geſetzt ſind, ſo iſt jedenfalls der Werth des Bruches kleiner, als der Werth des Ganzen, z. B. $\frac{7}{10}$ Gulden iſt kleiner, als ein ganzer Gulden, weil dieſem erſt $\frac{10}{10}$ gleichkommen.

Da wir ſagten, ein Bruch entſtehe, wenn man ein Ganzes (nicht mehrere Ganze) in eine Anzahl gleicher Theile theilt, und einen oder mehrere (wir ſagten nicht: alle) davon ſetzt, ſo liegt es in dem Begriffe, den wir von einem Bruche aufſtellten, daß ein ſolcher beſtändig kleiner iſt als ein Ganzes, durch deſſen Theilung er entſtand; z. B. $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ ſind lauter Brüche die kleiner ſind, als das Ganze, welches aus 5 Fünfteln beſteht.

Weil der Nenner die Anzahl aller Theile, der Zähler aber die Anzahl der geſetzten Theile anzeigt, und weil nicht alle Theile geſetzt ſind, ſo iſt klar, daß bei einem wahren Bruche der Zähler immer kleiner ſeyn wird, als der Nenner.

Brüche der Art, deren Zähler kleiner iſt, als ihr Nenner, die alſo weniger werth ſind, als das Ganze, durch deſſen

Digitized by Google

Theilung sie entstanden, nennt man daher ächte oder eigentliche. So sind z. B. die Brüche

$$\frac{8}{9}, \frac{11}{304}, \frac{999}{1000}, \frac{1}{2}$$

ächte oder eigentliche.

Aber Niemand kann uns wehren, wenn wir uns vorstellen wollen, es sey nicht ein Ganzes, sondern eine Menge gleichnamiger Ganze jedes in gleichviele gleiche Theile getheilt. Wer z. B. ein Guldenstück wechseln läßt, bekommt 10 Sechser oder $\frac{10}{10}$ Gulden; wer aber 5 Guldenstücke wechseln läßt, bekommt 5mal 10 Sechser, oder, da 1 Sechser $= \frac{1}{10}$ Gulden, $\frac{50}{10}$ Gulden.

Dieser Ausdruck hat wohl die Form eines Bruches, da aber bei der Begriffs-Erklärung von Bruch ein Ganzes, dagegen hier mehrere Ganze in gleiche Theile getheilt wurden, so nennt man Brüche, zu deren Bildung mehrere gleichnamige Ganze getheilt werden mußten, unächte oder uneigentliche Brüche. Uneigentliche Brüche sind also solche, deren Zähler größer als der Nenner oder gleich dem Nenner ist, deren Werth also größer ist, als das zugehörige Ganze oder ihm gleich. Uneigentliche Brüche sind z. B.

$$\frac{7}{6}, \frac{11}{3}, \frac{8}{2} \text{ u. s. w.}$$

§. 80.

Wovon der Werth eines Bruches abhängig ist.

Die Größe oder der Werth eines Bruches wird durch 3 Momente bestimmt, und zwar:

a) Durch die Größe des Ganzen, welches getheilt worden ist, um den Bruch zu bilden. Z. B. der Bruch $\frac{3}{4}$ Kronenthaler hat den Werth $\left(121 \text{ und } \frac{1}{2}\right)$ Kreuzer, der Bruch $\frac{3}{4}$

Gulden ist nur 45 Kreuzer und der Bruch $\frac{3}{4}$ Kreuzer gar nur 3 Pfennige werth.

b) Durch die Anzahl der Theile, in welche das Ganze getheilt worden ist. Z. B. $\frac{1}{8}$ Maas ist sicherlich weniger werth, als $\frac{1}{4}$ Maas, also auch $\frac{3}{8}$ Maas in demselben Grade weniger werth als $\frac{3}{4}$ Maas.

c) Durch die Menge, in welcher die gleichen Theile des Ganzen im Bruche vorkommen. So ist z. B. ohne allen Anstand $\frac{15}{60}$ Gulden kleiner oder geringwerthiger als $\frac{23}{60}$ Gulden, indem der erste Bruch nur 15, der zweite aber 23 Kreuzer werth ist.

§. 81.

Brüche mit unbenannter Einheit, und Bestimmung ihres Werthes.

So wie man bei Betrachtung von Zahlen öfters auf die absolute Größe der Einheit, durch deren öftere Setzung die Zahl entstund, keine Rücksicht nimmt, und hiedurch die sogenannten unbenannten Zahlen erhält, so sieht man auch sehr oft bei Betrachtung von Brüchen, um die Untersuchungen zu vereinfachen, gar nicht darauf, welches Ganze, ob 1 Gulden, oder 1 Fuder, oder 1 Klafter, Behufs der Bruch-Bildung, getheilt worden ist, sondern man sagt nur im Allgemeinen: irgend ein Ganzes, eine Einheit deren Ausdruck die unbenannte Zahl 1 ist, sey in gleiche Theile getheilt und davon mehrere gesetzt worden. Statt z. B. zu sagen: $\frac{6}{10}$ Gulden ist mehr werth, als $\frac{3}{10}$ Gulden, sagt man allgemeiner $\frac{6}{10}$ ist mehr werth, als $\frac{3}{10}$, und der Werth solcher Brüche mit unbenannter Einheit hängt nur noch ab:

Digitized by Google

a) Von der Größe des Nenners oder von der Menge der gleichen Theile, in welche das Ganze getheilt wurde.

b) Von der Größe des Zählers oder von der Menge der gesetzten Theile.

§. 82.

Veränderungen, die mit Brüchen vorgenommen werden können.

Ein Bruch unterscheidet sich von einer ganzen Zahl nur dadurch, daß letztere eine öftere Wiederholung der nämlichen Einheit, der Bruch dagegen öftere Wiederholung des nämlichen Theiles der Einheit ist.

Z. B. 7 Gulden ist eine ganze Zahl,

7 Zehntelgulden ein Bruch.

Man sieht auf den ersten Blick, daß dieser Unterschied nicht wesentlich ist, indem auch der Zehntelsgulden (d. i. $\frac{1}{10}$ Gulden) als eine Einheit sich darstellen läßt, nämlich als Sechser, und 7 Sechser ist dann so gut eine ganze Zahl, als 7 Gulden.

Mit Brüchen lassen sich demnach keine andere Veränderungen vornehmen, als mit ganzen Zahlen. Man kann nämlich

a) einen Bruch größer machen, oder

b) ihn kleiner machen, oder

c) die Form seines Ausdruckes unbeschadet seines Werthes verändern.

§. 83.

Vergrößerung des Werthes eines Bruches.

Der Leser wird unschwer einsehen, daß uns zwei Mittel zu Gebote stehen, einen Bruch größer zu machen. Vergrößert man nämlich die Anzahl der gesetzten Theile, ohne den Werth irgend eines Theiles zu verändern, so wird der Werth des Bruches größer. Wollte man z. B. den Bruch $\frac{3}{17}$ viermal größer machen, so dürfte man nur statt $\frac{3}{17}$ setzen:

Digitized by Google

$\frac{(\text{viermal } 3)}{17}$ oder $\frac{12}{17}$. Niemand wird daran zweifeln, daß 12 Siebzehntel viermal größer ist, als 3 Siebzehntel. So ist z. B. $\frac{8}{9}$ doppelt so groß, als $\frac{4}{9}$; $\frac{5}{12}$ fünfmal größer als $\frac{1}{12}$ u. s. f.

Wenn man irgend ein Ganzes in gleiche Theile theilt, so fallen begreiflich diese Theile um so kleiner aus, in jemehr gleiche Theile man das Ganze theilte, und umgekehrt werden sie um so größer seyn, in je wenigere Theile man getheilt hat. Das weis im eigentlichsten Sinne jedes Kind, denn wenn 5 Kinder ein Schock Nüsse mit einander zu theilen haben, so werden sie es nicht gern sehen, wenn noch ein Sechstes dazu kommt und ebenfalls einen Theil in Anspruch nimmt.

Eben so einleuchtend ist, daß wenn 100 Soldaten zu gleichen Theilen sich in eine erbeutete Geld-Summe theilen, jeder dreimal mehr erhalten wird, als wenn die nämliche Summe unter 300 Mann hätte vertheilt werden sollen; daß im Allgemeinen der Werth eines Bruches so vielmal größer wird, so vielmal die Anzahl der Theile, in welche zur Bildung des Bruches das Ganze getheilt wird, sich verringert.

Da nun der Nenner durch die Menge seiner Einheiten anzeigt, in wie viele gleiche Theile das Ganze getheilt wird, so ist klar, daß ein Bruch 3-, 4- oder 5mal größer wird, wenn man den Nenner 3-, 4- oder 5mal kleiner macht, oder ihn durch 3, 4 oder 5 dividirt.

Um also einen Bruch 5mal größer zu machen, kann man entweder

a) den Zähler 5mal größer oder
b) den Nenner 5mal kleiner machen.

§. 84.

Multiplikation eines Bruches mit einer ganzen Zahl.

Aus dem Bisherigen ergibt sich nun das Verfahren, welches man anwendet, um einen Bruch mit einer ganzen

Digitized by Google

Zahl zu multipliziren. Man multiplizirt nämlich entweder den Zähler des Bruches mit der ganzen Zahl und läßt den Nenner ungeändert, oder man dividirt den Nenner des Bruches durch die ganze Zahl und setzt den Zähler unverändert darüber, indem einen Bruch mit einer ganzen Zahl z. B. mit 6 multipliziren doch offenbar so viel heißt, als ihn 6mal setzen, oder sechsmal größer machen.

Multiplikation des Zählers kann man immer anwenden; Division des Nenners wendet man aber nur dann an, wenn sich der Nenner ohne Rest durch die Zahl, mit welcher der Bruch multiplizirt werden soll, dividiren läßt.

Beispiele:

$$\frac{3}{5} \times 7 = \frac{21}{5} \qquad \frac{8}{9} \times 3 = \frac{8}{3}$$

$$\frac{1}{2} \times 8 = \frac{8}{2} \qquad \frac{1}{27} \times 9 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{12}{29} \times 2 = \frac{24}{29} \qquad \frac{7}{32} \times 8 = \frac{7}{4} \text{ u. s. w.}$$

§. 85.

Verkleinerung des Werthes eines Bruches.

Aehnlicher Weise gibt es zweierlei Mittel, einen Bruch kleiner zu machen; man verringere nämlich, um solches zu bewerkstelligen, die Menge der gesetzten Theile, indem man weniger setzt, oder man vermindere den Werth eines jeden einzelnen Theiles dadurch, daß man das Ganze in mehr gleiche Theile theilt.

Soll z. B. $\frac{24}{37}$ viermal kleiner gemacht werden, so setze man $\frac{6}{37}$ indem 6 der 4te Theil von 24 ist. Offenbar ist 6 Siebenunddreißigstel 4mal kleiner, als 24 Siebenunddreißigstel.

Oder um z. B. $\frac{3}{4}$ fünfmal kleiner zu machen, theile man das Ganze, statt in 4, in (fünfmal 4) oder in 20 gleiche

Digitized by Google

Theile, so ist gewiß jeder 5mal kleiner, als zuvor, nämlich: $\frac{1}{20}$ ist fünfmal kleiner, als $\frac{1}{4}$ und also auch $\frac{3}{20}$ fünfmal kleiner, als $\frac{3}{4}$.

§. 86.

Division eines Bruches durch eine ganze Zahl.

Um demnach einen Bruch durch eine ganze Zahl zu dividiren, hat man zweierlei Mittel, nämlich entweder

a) man dividire durch die ganze Zahl den Zähler und schreibe den Nenner ungeändert darunter, oder

b) man multiplizire den Nenner des Bruches mit der ganzen Zahl und schreibe den Zähler unverändert darüber.

Beispiele.

$$\frac{8}{19} : 4 = \frac{2}{19} \qquad \frac{2}{3} : 5 = \frac{2}{15}$$

$$\frac{36}{71} : 12 = \frac{3}{71} \qquad \frac{8}{9} : 7 = \frac{8}{63}$$

$$\frac{14}{19} : 7 = \frac{2}{19} \qquad \frac{1}{2} : 8 = \frac{1}{16}$$

§. 87.

Formveränderung eines Bruches ohne Werthveränderung.

Der Werth eines Bruches wird nicht verändert, wenn man Zähler und Nenner desselben mit der nämlichen Zahl multiplizirt. Z. B.

$$\frac{3}{4} = \frac{(\text{fünfmal } 3)}{(\text{fünfmal } 4)}$$

Dann multiplizirt man den Zähler eines Bruches mit 5, so wird wohl dadurch der Werth des Bruches 5mal größer; multiplizirt man aber auch den Nenner mit 5, so wird hiedurch der so eben fünfmal vergrößerte Bruchwerth wieder 5mal kleiner, die erste Veränderung ist also durch die zweite vollständig aufgehoben worden, und der Bruch hat den nämlichen Werth, wie zuvor. So ist z. B.

Digitized by Google

$\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ Zähler und Nenner mit 4 multiplizirt

$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ „ „ „ „ 3 „

$\frac{11}{30} = \frac{1100}{3000}$ „ „ „ „ 100 „

u. s. f.

Eben so wenig wird der Werth eines Bruches verändert, wenn man Zähler und Nenner desselben durch die nämliche Zahl dividirt; denn dividirt man den Zähler durch irgend eine Zahl z. B. durch 4, so wird der Bruchwerth zwar 4mal kleiner; dividirt man aber auch den Nenner durch 4, so wird der 4mal kleiner gewordene Bruchwerth wieder 4mal größer; ist also nach beiden Veränderungen auf seine ursprüngliche Größe zurückgekommen.

Z. B. $\frac{16}{48} = \frac{16 : 4}{48 : 4} = \frac{4}{12}$

Ferner: $\frac{4}{12} = \frac{4 : 4}{12 : 4} = \frac{1}{3}$

§. 88.

Brüche zu reduziren.

Einen Bruch reduziren *) heißt, demselben die möglichst kleinste Form verschaffen, ohne seinen Werth zu ändern. Dieß geschieht, indem man die größte Zahl sucht, durch welche Zähler und Nenner ohne Rest dividirt werden können, diese Division wirklich vollzieht, und die Quotienten in Bruchform anschreibt.

Es sey z. B. der Bruch $\frac{9}{39}$ zu reduziren. Man dividire Zähler und Nenner durch 3, so erhält man den möglichst kleinsten Ausdruck des Bruches, nämlich: $\frac{3}{13}$.

*) In manchen Rechenbüchern spricht man hier, aber unrichtig, vom Verkleinern.

Digitized by Google

Im Bruche $\frac{49}{63}$ dividire man Zähler und Nenner durch 7, so ergibt sich der Bruch $\frac{7}{9}$.

Ob man, um Zähler und Nenner zu dividiren, die möglichst größte Zahl angewendet hat, erkennt man daraus, wenn in dem zum Vorschein kommenden Bruche Zähler und Nenner gar nicht mehr gemeinschaftlich durch irgend eine Zahl ohne Rest dividirt werden können. Z. B. $\frac{49}{63} \overset{:7}{\Big|} \frac{7}{9}$.

Hier war 7 wirklich die möglichst größte Zahl, durch welche Zähler und Nenner dividirt werden konnten, indem $\frac{7}{9}$ so beschaffen ist, daß Zähler und Nenner durch keine Zahl, ausgenommen durch 1, ohne Rest dividirbar sind.

Kommt man aber nach vollbrachter Division auf einen Bruch, dessen Form auf ähnliche Art noch weiter verkleinert werden kann, so wiederholt man das oben angegebene Verfahren. Z. B. Es sey der Bruch $\frac{204}{276}$ zu reduziren:

$$\begin{array}{c|c|c|c} \overset{:2}{\smile} & \overset{:2}{\smile} & \overset{3}{\smile} & \\ \hline 204 & 102 & 51 & 17 \\ \hline 276 & 138 & 69 & 23 \end{array}$$

Demnach ist $\frac{17}{23}$ der verlangte kleinste Ausdruck des Bruches $\frac{204}{276}$.

§. 89.

Was es heißt, Brüche auf gleiche Benennung bringen.

Man sagt, Brüche sind von gleicher Benennung, wenn sie gleiche Nenner haben; wie z. B. die Brüche:

$\frac{3}{17}$, $\frac{8}{17}$, $\frac{13}{17}$, $\frac{91}{17}$ u. s. w.

Brüche auf gleiche Benennung bringen, heißt, ihnen gleiche

Digitized by Google

Nenner verschaffen, ohne ihren Werth zu verändern. So sind zwar die Brüche $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{8}$ nicht von gleicher Benennung, welche letztere sie aber erhalten, wenn man der Reihe nach dafür setzt:

$$\frac{4}{8} \quad \frac{6}{8} \quad \frac{5}{8}$$

indem $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ und $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ ist.

§. 90.

Brüche auf gleiche Benennung zu bringen.

Da hier nicht der Werth, sondern nur die Form von Brüchen verändert werden darf, so stehn uns, um Brüchen gleiche Nenner zu verschaffen, nur zwei Mittel zu Gebote, nämlich:

a) Man dividire Zähler und Nenner des einen oder des andern Bruches durch die nämliche Zahl. Sollen z. B. die Brüche

$$\frac{4}{5} \quad \frac{15}{25} \quad \frac{50}{125}$$

unter gleiche Benennung gebracht werden, so dividire man Zähler und Nenner des zweiten durch 5, und Zähler und Nenner des dritten durch 25, den ersten aber lasse man ungeändert; man erhält:

$$\frac{4}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{2}{5}$$

für

$$\frac{4}{5} \quad \frac{15}{25} \quad \frac{50}{125}$$

oder

b) Man multiplizire Zähler und Nenner eines oder mehrerer oder aller Brüche, die auf gleiche Benennung gebracht werden sollen mit der nämlichen Zahl. Um z. B. die Brüche

$$\frac{3}{7} \quad \frac{19}{21} \quad \frac{6}{42}$$

unter gleiche Benennung zu bringen, multiplizire man Zähler

Digitized by Google

und Nenner des ersten mit 6, und Zähler und Nenner des zweiten mit 2, den dritten Bruch lasse man ungeändert. Man erhält:

$$\frac{18}{42} \quad \frac{38}{42} \quad \frac{6}{42}$$

Man ersieht jedoch leicht, daß nicht, bei allen Aufgaben solcher Art gerade so verfahren werden kann, wie hier. Sind z. B. die Brüche $\frac{3}{5}$ und $\frac{7}{8}$ unter gleiche Benennung zu bringen, so können wir keine Zahl finden, mit welcher man Zähler und Nenner des ersten Bruches multipliziren müßte, damit man Achtel bekäme, und eben so wenig kann der zweite Bruch $\frac{7}{8}$ dadurch, daß man Zähler und Nenner durch die nämliche Zahl dividirt, in Fünftel verwandelt werden.

Würde man dagegen Zähler und Nenner des ersten Bruches mit 8, und Zähler und Nenner des zweiten Bruches mit 5 multipliziren, so erhielte man statt der Brüche

$$\frac{3}{5} \text{ und } \frac{7}{8}$$

die Brüche $\frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 8}$ und $\frac{7 \cdot 5}{8 \cdot 5}$

deren Nenner offenbar gleich sind, da $5 \cdot 8$ eben so groß ist als $8 \cdot 5$ nämlich jeder Nenner $= 40$.

Sollen überhaupt beliebige Brüche unter gleiche Benennung gebracht werden, so braucht man nur Zähler und Nenner eines jeden Bruches mit dem Produkte der Nenner aller übrigen Brüche zu multipliziren.

Hiedurch wird nämlich der Werth von keinem der Brüche geändert, indem Zähler und Nenner eines jeden mit der nämlichen Zahl, nämlich dem Produkte aller übrigen Nenner multiplizirt wird, und alle neuen Brüche werden gleiche Nenner gewinnen, indem jeder neue Nenner ein Produkt ist aus dem Nenner, der schon da war, in alle andern Nenner; da

Digitized by Google

nun ein Nenner und alle andern offenbar alle Nenner ausmachen, so ist jeder neue Nenner ein Produkt aus allen Nennern, und alle neuen Nenner sind daher einander gleich. Z. B. unter gleiche Benennung sollen gebracht werden die Brüche:

$$\frac{2}{3} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{6}{7}$$

Man multiplizire Zähler und Nenner des ersten Bruches mit 5 . 7, des zweiten mit 3 . 7, des dritten mit 3 . 5 so erhält man statt

$$\frac{2}{3} \qquad \frac{4}{5} \qquad \frac{6}{7}$$

die Brüche $\frac{2 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 5 \cdot 7}$ $\frac{4 \cdot 3 \cdot 7}{5 \cdot 3 \cdot 7}$ $\frac{6 \cdot 3 \cdot 5}{7 \cdot 3 \cdot 5}$

oder durch wirkliche Berechnung

$$\frac{70}{105} \quad \frac{84}{105} \quad \frac{90}{105}$$

Wobei man auf den ersten Blick sieht, daß wegen Gleichheit der Faktoren die Bruchnenner 3 . 5 . 7, 5 . 3 . 7, 7 . 3 . 5 einander gleich seyn müssen; auch ist der Werth von keinem Bruch verändert worden, indem Zähler und Nenner des ersten mit 35, des zweiten mit 21 und Zähler und Nenner des dritten mit 15 multiplizirt wurde.

Das hier erläuterte Verfahren pflegt man auch so auszudrücken: Um Brüche auf gleiche Benennung zu bringen, multiplizire man alle Nenner mit einander, so erhält man den gemeinschaftlichen Nenner (General-Nenner); jeden neuen Zähler aber findet man, wenn man den vorhandenen Zähler eines jeden Bruches mit allen Nennern multiplizirt, nur nicht mit dem seinigen.

§. 91.

Brüche zu addiren.

Wenn Brüche gleiche Nenner haben, so unterliegt es gar keinem Bedenken, wie sie addirt werden. Man addirt

Digitized by Google

nämlich die Zähler der zu summirenden Brüche, und schreibt den gemeinschaftlichen Nenner unter die Summe. Z. B.

$$\frac{3}{17} + \frac{2}{17} + \frac{5}{17} = \frac{3+2+5}{17} = \frac{10}{17}$$

oder

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3+1}{5} = \frac{4}{5}$$

Sind aber die Nenner der Brüche nicht gleich, so kann keine Addition stattfinden. So geben z. B. die Brüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{7}$ weder 5 Viertel, noch 5 Siebentel und man kann sie eben so wenig in ein Ganzes zusammenfassen, als 3 Ellen und 2 Maas.

Um also Brüche von ungleicher Benennung zu addiren, bringe man sie zuvor auf gleiche Benennung und verfahre dann so, wie oben gesagt worden ist. Z. B.

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{7}$$

Dafür setze man, indem man die beiden Brüche unter gleiche Benennung bringt

$$\frac{21}{28} + \frac{8}{28}$$

was zusammengenommen $\frac{29}{28}$ ausmacht.

Zu addiren seien ferner die Brüche:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{2}{3}$$

Bringt man sie unter gleiche Benennung, so erhält man: $\frac{72}{144} + \frac{108}{144} + \frac{120}{144} + \frac{96}{144}$ welche Brüche addirt die Summe: $\frac{396}{144}$ geben.

Der Kürze im Anschreiben zu gefallen pflegt man den gemeinschaftlichen Nenner nur einmal anzuschreiben, z. B.:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{7}{8} = \frac{24+32+42}{48} = \frac{96}{48}$$

andre nicht wesentliche Abkürzungen zu übergehen.

Digitized by Google

§. 92.

Brüche von einander zu subtrahiren.

Das Verfahren welches man anwenden muß, um einen Bruch von einem andern zu subtrahiren, ist dem bei der Addition ganz ähnlich. Man sehe nämlich vor allem darauf, ob die beiden Brüche gleiche Nenner haben. Ist Letzteres der Fall, so subtrahire man den Zähler des Subtrahends von dem des Minuends, und setze unter den Rest den gemeinschaftlichen Nenner, z. B.:

$$\frac{18}{19} - \frac{12}{19} = \frac{18-12}{19} = \frac{6}{19}$$

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3-1}{5} = \frac{2}{5}$$ und so in andern Fällen.

Haben aber beide Brüche nicht gleiche Nenner, so bringe man sie zuvor unter gleiche Benennung und verfahre, wie eben gesagt worden ist.

Es sey z. B. der Bruch $\frac{3}{7}$ vom Bruche $\frac{2}{3}$ zu subtrahieren; nämlich zu bilden: $\frac{2}{3} - \frac{3}{7}$; hiefür erhält man, indem man die Brüche unter gleiche Benennung bringt $\frac{14}{21} - \frac{9}{21}$ und die Differenz ist $\frac{5}{21}$ nämlich:

$$\frac{2}{3} - \frac{3}{7} = \frac{14}{21} - \frac{9}{21} = \frac{5}{21}.$$

Ferner $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{5}{10} - \frac{2}{10} = \frac{3}{10}$

$\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{12}{15} - \frac{10}{15} = \frac{2}{15}$ u. s. in andern Fällen.

§. 93.

Mit einem Bruche eine ganze Zahl oder einen Bruch zu multipliziren.

Wenn Kaius zum Sempronius sagt: ich bin jetzt $\frac{3}{4}$ mal so alt als Du; und das Alter des Sempronius ist 24

Digitized by Google

Jahre, so ist offenbar Caius 12 Jahre alt. Man erhält nämlich das Alter des Caius, wenn man den vierten Theil des Alters des Sempronius dreimal setzt.

So wird überhaupt eine Zahl z. B. 40 fünfachtelmal gesetzt oder mit dem Bruche $\frac{5}{8}$ multiplizirt, wenn man den achten Theil der Zahl 40 fünfmal setzt, d. i. wenn man die Zahl 40 durch den Nenner 8 dividirt und mit dem Zähler 5 multiplizirt.

Eben so ist $36 \times \frac{7}{12} = (36 : 12) \times 7 = 21$

Ferner $7 \times \frac{2}{3} = \frac{7 \times 2}{3}$.

Man mag also eine ganze Zahl oder einen Bruch oder was der Multiplicand sonst für eine Form haben mag, mit einem Bruche multipliziren, so ist in dieser Forderung Theilung und Setzung oder Division und Multiplikation zugleich enthalten: ist z. B. der Multiplikator der Bruch $\frac{4}{7}$, so zeigt dieß an, daß der Multiplikand, er sey nun ein Bruch oder eine ganze Zahl, in 7 gleiche Theile getheilt, und von diesen gleichen Theilen vier genommen werden sollen.

Hieraus ist nun leicht abzuleiten, wie man einen Bruch mit einem Bruche multipliziren müsse. Es sey z. B. $\frac{4}{5}$ mit $\frac{3}{7}$ zu multipliziren. Hier ist $\frac{4}{5}$ der Multiplikand und $\frac{3}{7}$ der Multiplikator. Man soll vor allem den Bruch $\frac{4}{5}$ in 7 gleiche Theile theilen: einer davon ist $\frac{4}{5 \cdot 7}$ und einen solchen Theil soll man 3mal setzen, so erhält man als Produkt $\frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 7}$.

Nämlich: $\frac{4}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{12}{35}$

Digitized by Google

Daher die gewöhnliche Vorschrift: um einen Bruch mit einem andern zu multipliziren, multiplizire man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner und schreibe die Produkte in Bruchform an. Fernere Beispiele:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

$$\frac{3}{5} \times \frac{7}{8} = \frac{21}{40} \qquad \frac{2}{19} \times \frac{5}{6} = \frac{10}{114}$$

$$\frac{7}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{7}{72} \qquad \text{u. s. w.}$$

Wenn mehr als zwei Brüche mit einander multiplizirt werden sollen, multiplizire man alle Zähler und alle Nenner und schreibe eben so die Produkte in Bruchform an. Z. B.

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{8}{9} = \frac{1.3.5.8}{2.4.6.9} = \frac{120}{432}$$

§. 94.

Division von ganzen Zahlen und Brüchen durch Brüche.

Wenn gefragt wird, wie vielmal $\frac{4}{5}$ in 32 enthalten sey, und man wollte antworten 8mal, so wäre diese Antwort offenbar unrichtig, denn 4 Ganze sind wohl allerdings 8mal in 32 enthalten, 4 Fünftel aber müssen offenbar öfter enthalten seyn, als 4 Ganze und zwar fünfmal öfter, weil das Fünftel fünfmal kleiner ist, als das Ganze. Um demnach den richtigen Quotus zu gewinnen, muß man das obige 8 noch mit 5 multipliziren, wodurch 40 zum Vorschein kommt, so daß also $32 : \frac{4}{5} = (32 : 4) \times 5 = 8 \times 5 = 40$

Soll also irgend eine ganze Zahl oder ein Bruch durch einen Bruch dividirt werden, so kann man wohl durch den Zähler des Bruches den Dividend dividiren, muß ihn aber, damit der Quotus nicht zu klein werde, wieder mit dem Nenner des Divisor-Bruches multipliziren. Z. B. wie oft sind

Digitized by Google

$\frac{3}{4}$ Kronenthaler in 12 Kronenthalern enthalten? Drei ganze Kronenthaler sind (12 : 3) oder 4mal in 12 Kronenth. enthalten, mithin sind 3 Viertels Kronenth. viermal öfter, also 16mal darin enthalten.

Sollte ferner $\frac{4}{5}$ dividirt werden durch $\frac{3}{7}$, so würde man den Dividend $\frac{4}{5}$ durch 3 dividiren und mit 7 multipliziren.

$$\frac{4}{5} : 3 = \frac{4}{15}$$

$$\frac{4}{15} \times 7 = \frac{28}{15} \quad \text{Mithin}$$

$$\frac{4}{5} : \frac{3}{7} = \frac{28}{15}$$ welchen Quotienten man auch erhalten haben würde, wenn man den Zähler des Dividend-Bruches mit dem Nenner des Divisors, und den Nenner des Dividends mit dem Zähler des Divisors multiplizirt und die Produkte in Bruchform angeschrieben hätte.

Daher auch die in Rechenbüchern vorkommende Regel: Um einen Bruch durch einen andern zu dividiren, multiplizire man Zähler und Nenner beider Brüche übers Kreuz, nämlich:

$$\frac{4}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{28}{15}$$

Oder auch: Man stürze den Divisor-Bruch, so daß der Zähler zum Nenner und der Nenner zum Zähler wird, und multiplizire dann beide Brüche mit einander. Z. B.

$$\frac{4}{5} : \frac{3}{7} = \frac{4}{5} \times \frac{7}{3} = \frac{28}{15}$$ wie oben.

Fernere Beispiele:

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{3}{2} \qquad \frac{2}{5} : \frac{1}{8} = \frac{16}{5}$$

$$\frac{4}{7} : \frac{8}{9} = \frac{36}{56} \qquad \frac{12}{13} : \frac{1}{2} = \frac{24}{13}$$

Digitized by Google

§. 95.

Besondere Vorschrift zur Division eines Bruches durch einen andern.

Da man, um einen Bruch durch einen andern zu dividiren, den Dividend-Bruch durch den Zähler des Divisor-Bruches dividiren, und mit dessen Nenner multipliziren muß, so kann man auch die Division von Brüchen durch Brüche unter folgende Regel bringen.

Um einen Bruch durch einen andern zu dividiren, dividire man Zähler durch Zähler und Nenner durch Nenner, und schreibe die Quotienten in Bruchform an, z. B.

$$\frac{8}{81} : \frac{4}{9} = \frac{8 : 4}{81 : 9} = \frac{2}{9}$$

Denn man muß den Dividend-Bruch $\frac{8}{81}$ durch den Zähler 4 des Divisor-Bruches dividiren und mit dem Nenner 9 multipliziren; ersteres geschieht, wenn man den Zähler 8, des Dividends durch 4 dividirt, letzteres, indem man den Nenner 81 durch 9 dividirt, nämlich:

$$\frac{8}{81} : 4 = \frac{2}{81}$$

$$\frac{2}{81} \times 9 = \frac{2}{9}$$

Dieses Verfahren ist begreiflich nur dann anwendbar, wenn Zähler und Nenner des Dividends ohne Rest durch Zähler und Nenner des Divisors dividirt werden können.

§. 96.

Verwandlung einer ganzen Zahl in einen Bruch.

Wenn man irgend eine Zahl z. B. 6 mit einem Bruche z. B. mit $\frac{3}{3}$ oder einem andern Bruche, dessen Zähler und Nenner einander gleich sind, multiplizirt, so wird dadurch der Werth der ganzen Zahl nicht geändert: $6 \times \frac{3}{3} = \frac{6 \cdot 3}{3} = \frac{18}{3}$ was

Digitized by Google

der Zahl 6 gleich ist. Ferner

$$8 \times \frac{5}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

$$4 \times \frac{10}{10} = \frac{70}{10} = 7 \text{ u. s. w.}$$

Man kann daher leicht eine ganze Zahl unter die Form eines Bruches von beliebigem Nenner bringen, wenn man dieselbe mit diesem Nenner multiplizirt, und ihn als Nenner unter das Produkt stellt. — Soll z. B. die Zahl 7 in einen Bruch vom Nenner 8 verwandelt werden, so erhält man

$$7 = \frac{7 \cdot 8}{8} = \frac{56}{8}$$

denn

$$\frac{7 \cdot 8}{8} = 7 \cdot \frac{8}{8} = 7 \cdot 1 = 7$$

§. 97.

Gemischte Zahl. Ausdruck derselben.

Die Verbindung eines Bruches mit einer ganzen Zahl durch Addition nennt man eine gemischte Zahl, so sind z. B. $8 + \frac{3}{4}$, $7 + \frac{8}{9}$, $1 + \frac{1}{2}$ ꝛc. gemischte Zahlen.

Kürze halber läßt man beim Ausdrucke von gemischten Zahlen das Additions-Zeichen, (+) welches zur Verbindung des Bruches und der ganzen Zahl dient, weg, und schreibt statt $8 + \frac{3}{4}$, $7 + \frac{8}{6}$ kurzweg $8\,\frac{3}{4}$, $7\,\frac{8}{9}$

§. 98.

Verwandlung gemischter Zahlen in uneigentliche Brüche und umgekehrt.

Jede gemischte Zahl z. B. $8 + \frac{3}{4}$ kann auf die Form eines uneigentlichen Bruches gebracht werden, wenn man die ganze Zahl in einen Bruch von dem nämlichen Nenner ver-

Digitized by Google

wandelt, den der mit der ganzen Zahl verbundene Bruch bereits hat, und dann beide Brüche addirt, nämlich:

$$8\frac{3}{4} = 8 + \frac{3}{4} = \frac{8 \cdot 4}{4} + \frac{3}{4} =$$
$$= \frac{32}{4} + \frac{3}{4} = \frac{35}{4}.$$

Daher die Vorschrift gegeben wird: Um eine gemischte Zahl in einen uneigentlichen Bruch zu verwandeln, multiplizire man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruchs, addire den Zähler dazu, und schreibe den Nenner als solchen unter die Summe.

Fernere Beispiele:

$$3\frac{11}{12} = \frac{47}{12} \qquad 100\frac{4}{5} = \frac{504}{5}$$
$$1\frac{9}{13} = \frac{22}{13} \qquad 7\frac{1}{2} = \frac{15}{2} \text{ u. s. w.}$$

Eben so leicht kann ein uneigentlicher Bruch z. B. $\frac{13}{4}$ in eine gemischte Zahl verwandelt werden. Da nämlich 4 in 13 dreimal enthalten ist, und immer $\frac{4}{4}$ ein Ganzes ausmacht, so beträgt der uneigentliche Bruch $\frac{13}{4}$ drei Ganze und ein Viertel, nämlich: $\frac{13}{4} = \frac{12}{4} + \frac{1}{4} = 3\frac{1}{4}$

Daher die Vorschrift: Um einen uneigentlichen Bruch in eine gemischte Zahl zu verwandeln, dividire man dessen Zähler durch seinen Nenner: der Quotus gibt die ganze Zahl, der Rest den Zähler und der Divisor den Nenner des Bruches, z. B.

$\frac{18}{7} = 2\frac{4}{7}$ weil $18 : 7 = 2$ und der Rest 4 ist.

Digitized by Google

$\frac{237}{2} = 118\frac{1}{2}$ weil 237 : 2 = 118 und der Rest = 1

$\frac{17}{15} = 1\frac{2}{15}$ weil 17 : 15 = 1 und der Rest = 2,

und so in andern Fällen.

§. 99.

Brüche als Divisionen betrachtet.

Wenn gefragt wird, wie oft 4 im Ganzen oder in 1 enthalten sey, so ist offenbar die richtige Antwort $\frac{1}{4}$ tel mal, das ist $1 : 4 = \frac{1}{4}$

eben so $1 : 7 = \frac{1}{7}$

und da nach früher angestellten Betrachtungen der Werth eines Quotienten wächst, wie der Dividend wächst, so ist

(3mal 1) : 4 = 3mal $\frac{1}{4}$ oder $3 : 4 = \frac{3}{4}$

(5mal 1) : 7 = 5mal $\frac{1}{7}$ oder $5 : 7 = \frac{5}{7}$

und so weiter, nämlich jede Division kann als Bruch ausgedrückt werden, dessen Zähler der Dividend und dessen Nenner der Divisor ist, und eben deßhalb kann man auch jeden gegebenen Bruch als Resultat einer Division ausdrucken, für welche der Zähler des Bruches Dividend und der Nenner Divisor ist z. B.

$\frac{18}{35} = 18 : 35$

$\frac{7}{19} = 7 : 19$ und so weiter.

Daher sind auch das Divisionszeichen nämlich $\frac{16}{2}$ das ist 16 dividirt durch 2 und das Bruchzeichen $\frac{2}{3}$ nämlich 2 Drittel dieselben.

Digitized by Google

§. 100.

Genauere Bestimmung eines Quotienten durch Beifügung eines Bruches.

Wenn bei Ausführung einer Division am Ende ein Rest bleibt, so muß dieser, um den Quotus vollständig angeben zu können, auch noch durch den Divisor dividirt werden, z. B. $19 : 4 = 4$ mit dem Reste 3, welcher noch durch 4 dividirt werden muß, so daß also $4 + \frac{3}{4}$ der vollständige Quotus ist.

Um also in der Division den Quotienten genau zu gewinnen, füge man dem Quotienten, so weit man ihn als ganze Zahl erhält, einen Bruch bei, dessen Zähler der Rest und dessen Nenner der Divisor ist. Es soll z. B. 8237 durch 19 dividirt werden:

```
19 | 8 2,3,7, | 433
   | 7 6      |
   ------------
     6 3
     5 7
     -----
       6 7
       5 7
       -----
Rest:  1 0
```

Also der vollständige Quotient $433\frac{10}{19}$.

§. 101.

Verbindung mehrerer Rechnungsoperationen bei Brüchen.

Es ist auch wohl möglich, daß der Zähler oder der Nenner eines Bruches selbst wieder ein Bruch, oder eine gemischte Zahl oder eine Summe oder eine Differenz zwischen Brüchen oder ganzen Zahlen ist, d. i. mit andern Worten: es können mehrere mit Brüchen vorzunehmende Rechnungs-Operationen zugleich angezeigt und zu vollziehen seyn.

Wie solches zu bewerkstelligen sey, wird sich, nachdem wir die wesentlichen mit Brüchen vorzunehmenden Rechnungen kennen, am leichtesten an Beispielen erläutern lassen, und zwar:

Digitized by Google

a) Addition und Subtraktion verbunden

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} - \frac{1}{2}$$

Man bringe alle drei Brüche auf gleiche Benennung, so erhält man:

$$\frac{20}{30} + \frac{24}{30} - \frac{15}{30} \text{ oder kürzer:}$$

$$\frac{20 + 24 - 15}{30} \text{ oder } \frac{29}{30}$$

Ferner:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{60 - 40 + 30 - 24}{120} =$$

$$= \frac{26}{120} = \frac{13}{60}$$

b) Multiplikation und Division.

$$\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{9}\right) : \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{2.4.8}{3.5.9} : \frac{1}{2.3.4}$$

$$= \frac{64}{135} : \frac{1}{24} = \frac{1536}{135}$$

c) Multiplikation und Division mit gemischten Zahlen:

$$\left(2\frac{1}{2} \cdot 8\frac{2}{3} \cdot 7\frac{1}{5}\right) : \left(1\frac{1}{3} \cdot 2\frac{3}{4}\right) =$$

$$= \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{26}{3} \cdot \frac{36}{5}\right) : \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{11}{4}\right) = \frac{5.26.36}{2.3.5} : \frac{4.11}{3.4} =$$

$$\frac{4680}{30} : \frac{44}{12} = \frac{56160}{1320} = \frac{5616}{132} = \frac{1404}{33}$$

indem man zuletzt Zähler und Nenner des Bruches $\frac{5616}{132}$ durch 4 dividirt u. s. f.

§. 102.

Uebersicht der Lehre von den Brüchen.

1) Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplizirt, wenn man mit derselben den Zähler multiplizirt und den Nenner ungeändert läßt, oder wenn man den Nen-

Digitized by Google

ner durch die ganze Zahl dividirt und den Zähler ungeändert darüber schreibt. Z. B. $\frac{3}{7} \times 4 = \frac{12}{7}$ oder $\frac{8}{35} \times 7 = \frac{8}{5}$

2) Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man den Zähler durch die ganze Zahl dividirt und den Nenner ungeändert läßt, z. B. $\frac{12}{17} : 3 = \frac{4}{17}$ oder wenn man den Nenner mit der ganzen Zahl multiplizirt und den Zähler unverändert läßt, z. B. $\frac{2}{7} : 8 = \frac{2}{56}$

3) Ein Bruch wird auf die kleinste Form gebracht oder reduzirt, wenn man Zähler und Nenner desselben gemeinschaftlich durch die größte Zahl dividirt, durch welche diese Division ohne Rest ausführbar ist, und die Quotienten in Bruchform anschreibt, z. B. $\frac{8}{24} = \frac{8:8}{24:8} = \frac{1}{3}$

4) Brüche unter gleiche Benennung zu bringen, multiplizire man Zähler und Nenner eines jeden Bruches mit dem Produkte aus den Nennern aller übrigen Brüche, z. B.

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{8}{9}$$

Hiefür

$$\frac{2 \cdot 5 \cdot 9}{3 \cdot 5 \cdot 9}, \frac{4 \cdot 3 \cdot 9}{5 \cdot 3 \cdot 9}, \frac{8 \cdot 3 \cdot 5}{9 \cdot 3 \cdot 5}$$

oder: $\frac{90}{135}, \frac{108}{135}, \frac{120}{135}$

5) Um zu untersuchen, ob zwei Brüche einander gleich sind, bringe man sie auf gleiche Benennung (ohne den Nenner wirklich zu berechnen) und sehe nach der Gleichheit der Zähler, z. B.

$\frac{8}{9} \overset{(?)}{=} \frac{104}{116}$ Hiefür setze man

$\frac{8 \cdot 116}{9 \cdot 116} \overset{(?)}{=} \frac{104 \cdot 9}{9 \cdot 116}$ oder $8 \cdot 116 \overset{(?)}{=} 9 \cdot 104$

oder $928 \overset{(?)}{=} 936$

der zweite Bruch demnach größer, als der erste.

Digitized by Google

6) Brüche von gleicher Benennung werden addirt, wenn man die Zähler addirt, und den gemeinschaftlichen Nenner unter die Summe schreibt, z. B. $\frac{2}{9} + \frac{8}{9} = \frac{10}{9}$.

Haben die zu addirenden Brüche nicht gleiche Benennung, so verschafft man ihnen diese und verfährt, wie so eben gesagt wurde.

7) Zwei gleichnamige Brüche werden von einander subtrahirt, wenn man den Zähler des Subtrahends von dem des Minuends subtrahirt, und unter die Differenz den gemeinschaftlichen Nenner setzt, z. B. $\frac{8}{11} - \frac{3}{11} = \frac{5}{11}$

Ungleichnamige Brüche macht man zuerst gleichnamig, und verfährt, wie gesagt wurde.

8) Eine gemischte Zahl wird in einen uneigentlichen Bruch verwandelt, wenn man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruches multiplizirt, den Zähler desselben dazu addirt, und unter die Summe den Bruch-Nenner als solchen setzt, z. B. $8\frac{3}{4} = \frac{4 \cdot 8 + 3}{4} = \frac{35}{4}$

Ein uneigentlicher Bruch wird in eine gemischte Zahl verwandelt, indem man den Zähler durch den Nenner wirklich dividirt; der Quotus gibt dann die ganze Zahl, der Rest den Zähler und der Divisor den Nenner des Bruches.

Z. B. $\frac{18}{5} = 18 : 5 = 3\frac{3}{5}$

9) Brüche werden mit einander multiplizirt, wenn man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplizirt und die Produkte in Bruchform anschreibt, z. B.

$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$ oder $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{24}$

10) Ein Bruch wird durch einen andern dividirt, wenn man den Divisor-Bruch stürzt, so daß der Zähler zum Nenner und der Nenner zum Zähler wird, und dann die Brüche multiplizirt, z. B. $\frac{8}{9} : \frac{2}{3} = \frac{8}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{24}{18}$

oder indem man Zähler durch Zähler und Nenner durch Nenner dividirt und die Quotienten in Bruchform anschreibt, z. B.

$\frac{8}{35} : \frac{4}{7} = \frac{8 : 4}{35 : 7} = \frac{2}{5}$.

Digitized by Google

V. Abschnitt.

Lehre von den Dezimal-Brüchen.

§. 103.

Begriff von Dezimal-Brüchen.

Dezimal-Brüche nennt man solche Brüche, deren Nenner ausgedrückt ist durch 1 mit angehängten Nullen, während der Zähler jede beliebige Zahl seyn kann. So sind z. B. die Brüche: $\frac{8}{10}$, $\frac{156}{100}$, $\frac{3}{1000}$, $\frac{3257897}{10000}$ u. s. w.

Dezimalbrüche, (von dem lateinischen Worte decem zehn.)

Dezimal-Brüche können also nur Zehntel, oder Hundertel, oder Tausendtel ꝛc. seyn.

§. 104.

Ausdruck von Dezimal-Brüchen.

Dezimal-Brüche könnte man wohl kürzer ausdrücken, wenn man den Nenner ganz wegließe und nur auf irgend eine Weise andeutete, wie viele Nullen in dem Ausdrucke desselben hinter dem 1 vorkommen. Gesetzt man wollte durch eine rechts oder den Zähler gesetzte römische Ziffer die Anzahl von Nullen andeuten, die im Ausdrucke des Nenners vorkommen, so würde

$$3754^{\text{IV.}} \text{ bedeuten } \frac{3754}{10000}$$

$$7^{\text{III.}} = = = \frac{7}{1000} \quad \text{u. s. w.}$$

Viel bequemer, als eine solche Bezeichnungs-Art ist aber die, welche man wirklich eingeführt hat. Man läßt nämlich denn Nenner eines Dezimal-Bruches ganz weg; und schneidet dafür im Zähler von Rechts nach Links so viele Ziffern

Digitized by Google

mittelst eines Comma ab, als im Ausdrucke des Nenners hinter der Ziffer 1 Nullen vorkommen.

Ist z. B. der Nenner 1000, so schneidet man drei, ist er 100000, so schneidet man fünf Ziffern ab.

Diese zur Bezeichnung des Nenners mittelst eines Comma im Zähler von Rechts nach Links abgeschnittenen Ziffern nennt man Dezimal-Stellen oder kurzweg Dezimalen.

So schreibt man z. B.

$$3{,}279 \text{ statt } \frac{3279}{1000}$$

$$83{,}5 \text{ statt } \frac{835}{10} \text{ u. s. w.}$$

Es kann der Fall auftretten, daß im Ausdrucke des Nenners hinter der Ziffer 1 mehr Nullen vorkommen, als Ziffern im Zähler, daß man demnach mehr Ziffern abschneiden müßte, als da sind. Man sollte z. B. den Dezimal-Bruch $\frac{81}{10000}$ kürzer ausdrücken.

Hier kommen im Nenner 4 Nullen und im Zähler nur 2 Ziffern vor; aber Niemand wird bezweifeln, daß die Ausdrücke

$$81 \quad 081 \quad 0081 \quad 0000081$$

jeder weder mehr noch weniger als die Zahl 81 bezeichnet, indem die Nullen vor dem 8 weder die decadische Stelle von 8 noch von 1 verrücken.

Um also $\frac{81}{10000}$ kurz auszudrücken, hänge man dem Zähler 81 zur Rechten drei Nullen an, und schneide sodann, weil im Nenner vier Nullen vorkommen, vier Dezimal-Stellen ab. *)

Man erhält $\frac{81}{10000} = 0{,}0081$

*) Es ist hier nicht mehr nöthig zu sagen „von Rechts nach Links", weil das Abschneiden der Ziffern in dieser Richtung schon in dem Begriff von Dezimal-Stellen liegt.

Digitized by Google

So ist ferner:

$\frac{2}{100} = 0{,}02$ | $\frac{32}{1000000} = 0{,}000032$

$\frac{837}{1000} = 0{,}837$ | u. s. w.

§. 105.

Angeschriebene Dezimal-Brüche zu lesen.

Um einen angeschriebenen Dezimal-Bruch zu lesen, spreche man ihn aus, als wäre gar kein Comma vorhanden, und gebe einen Nenner an, welcher 1 ist mit so vielen Nullen, als Dezimal-Stellen vorhanden sind, z. B.: 8 3,2 5 7 8 lese man 832578 und spreche den Nenner 10000 aus, nämlich 1 mit vier Nullen, weil vier Dezimalen da sind.

0,0 0 0 3 2 5 lese man 325 und als Nenner gebe man 1000000 das ist 1 mit sechs Nullen an, weil im Bruche sechs Dezimalen vorkommen, und so in andern Fällen.

Man ersieht leicht, daß

1 Dezimal-Stelle den Nenner 10
2 " " " " 100
3 " " " " 1000
7 " " " " 10000000 bezeichnen.
u. s. w.

§. 106.

Stelle der Zehntel, Hundertel, Tausendtel u. s. w.

Den Bruch 3 8,2 9 8 3 oder ohne Verkürzung $\frac{382983}{10000}$ könnte man ohne Anstand auch als eine Summe betrachten, gebildet durch die Summanden:

$$\frac{380000}{10000} + \frac{2000}{10000} + \frac{900}{10000} + \frac{80}{10000} + \frac{3}{10000};$$

denn addirt man diese 5 Brüche zusammen, so erhält man den Bruch $\frac{382983}{10000}$ wieder, wie aus nachstehender Rechnung ersichtlich ist:

Digitized by Google

380000
2000
900
80
3

382983 Summe der Zähler.

Der Nenner ist 10000, weil dieser der gemeinschaftliche Nenner aller Summanden war.

Dividirt man nun, was ohne Werth-Veränderung der Brüche geschehen darf, Zähler und Nenner des ersten Summanden durch 10000, des zweiten durch 1000, des dritten durch 100, des vierten durch 10, während man den fünften Summanden ungeändert läßt, so erhält man:

$$\frac{380000}{10000} = \frac{38}{1} = 38$$

$$\frac{2000}{10000} = \frac{2}{10}$$

$$\frac{900}{10000} = \frac{9}{100}$$

$$\frac{80}{10000} = \frac{8}{1000}$$

$$\frac{3}{10000} = \frac{3}{10000}.$$

Folglich ist der Dezimal-Bruch

$$38{,}2983 = 38 + \frac{2}{10} + \frac{9}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{3}{10000}$$

und da statt des Bruches 38,2983 auch jeder beliebige andre Dezimal-Bruch hätte gesetzt werden können, so ist ersichtlich, daß, was im Ausdruck eines Dezimal-Bruches links vom Comma steht, eine ganze Zahl, die erste Dezimale hinter dem Comma Zehntel, die zweite Hundertel, die dritte Tausendtel, die sechste Milliontel u. s. w. bezeichne.

Einen Dezimal-Bruch z. B. 3,758296 kann man demnach auf zweierlei Art lesen: entweder 3758296 Milliontel oder 3 Ganze, 7 Zehntel, 5 Hundertel, 8 Tausendtel, 2 Zehn-

Digitized by Google

tausendtel, 8 Hunderttausendtel, und 6 Milliontel. Eben so wird der Bruch 1,00302 gelesen entweder: 100302 Hunderttausendtel, weil er 5 Dezimal-Stellen hat oder 1 Ganzes, 3 Tausendtel und 2 Hunderttausendtel.

§. 107.

Was es heißt: Dezimal-Brüche haben gleiche Benennung.

Wenn zwei oder mehrere Dezimalbrüche gleichviele Dezimal-Stellen haben, so kommt ihnen gleiche Benennung zu; denn die Anzahl der Dezimalstellen zeigt an, wie viele Nullen im Ausdrucke des Nenners hinter dem 1 vorkommen.

So haben z. B. die Dezimal-Brüche 8,379 0,0002 8,013 gleiche Benennung, weil der Nenner eines jeden 1 mit drei Nullen, also 1000 ist.

Dagegen sind die Dezimal-Brüche

0,82 37,2036 888,2

von ungleicher Benennung, weil der Nenner des ersten 100, der des zweiten 10000, der des dritten 10 ist.

§. 108.

Dezimal-Brüche unter gleiche Benennung zu bringen.

Der Dezimal-Bruch 3,7800 würde gelesen werden: 3 Ganze, 7 Zehntel, 8 Hunderttel, kein Tausendel, kein Zehntausendtel und das ist doch gewiß nicht mehr oder weniger, als 3 Ganze, 7 Zehntel, 8 Hundertel; nämlich:

$$3{,}78 = 3{,}7800$$

d. i. man kann den Dezimal-Stellen zur Rechten Nullen anhängen, so viele man will, ohne daß dadurch der Werth des Dezimal-Bruches geändert wird.

Die Wahrheit des Gesagten geht auch aus folgender Betrachtung hervor:

Wenn wir dem Dezimal-Bruche 3,78 zur Rechten zwei Nullen anhängen, so wird hiedurch der Zähler desselben 378 wohl hundertmal größer, da aber auch die Anzahl der Dezimal-Stellen um zwei wächst, denn er hatte deren zwei und

Digitized by Google

gewinnt durch Anhängung von Nullen deren vier, so erscheint die Anzahl der Nullen im Nenner ebenfalls um zwei vermehrt; der Nenner wird also eben so, wie der Zähler, 100mal größer und der Werth des Bruches erleidet also keine Aenderung.

Man bringt demnach zwei oder mehrere Dezimal-Brüche unter gleiche Benennung, wenn man jedem, der weniger Dezimal-Stellen hat, so lange zur Rechten Nullen anhängt, bis ihm eben so viele Dezimalstellen zu eigen kommen, als demjenigen von den Dezimal-Brüchen, welcher die meisten hat. Es sollen z. B. die Dezimal-Brüche

0,08 37,2 0,0002

unter gleiche Benennung gebracht werden. Der dritte hat die meisten, nämlich vier; man muß also dem ersten 2 und dem zweiten 3 Nullen anhängen; wodurch man erhält:

0,0800 37,2000 0,0002

§. 109.

Werth-Veränderung eines Dezimal-Bruches durch Verrückung der Comma.

Je nachdem man in einem Dezimal-Bruche das Comma mehr nach Rechts oder nach Links rückt, wird die Anzahl der Dezimal-Stellen kleiner oder größer. So bezeichnet z. B. 18,423 einen Bruch mit drei, 184,23 einen Bruch mit zwei, 1842,8 einen Bruch mit einer Dezimal-Stelle.

Dagegen hat 1,8423 vier und 0,18423 fünf Dezimal-Stellen.

Rückt man aber das Comma um eine Stelle nach Rechts, so erhält der Bruch eine Dezimal-Stelle, der Nenner also ein Null weniger, der Nenner wird also zehnmal kleiner, der Werth des Dezimal-Bruches also eben sovielmal größer. Nämlich: $1{,}832 = \frac{1832}{1000}$

$$18{,}32 = \frac{1832}{100}$$

und offenbar ist $\frac{1832}{100}$ zehnmal größer, als $\frac{183}{1000}$

Digitized by Google

Wollte man das Comma um zwei Stellen nach Rechts rücken, so erhielte man 183,2 oder $\frac{1832}{10}$ was 10.10 d. i. 100mal größer ist, als 1,832 oder $\frac{1832}{1000}$.

Ueberhaupt wird ein Dezimal-Bruch 10mal, 1000mal, 1000000mal größer werden, wenn man das Comma um eine, drei oder sechs Stellen nach Rechts zurückschiebt. Aus den nämlichen Gründen wird ein Dezimal-Bruch 10, 100, 10000mal kleiner, wenn das Comma um eine, zwei oder vier Stellen nach Links vorgerückt wird.

Soll das Comma um mehr Stellen nach Rechts oder Links gerückt werden, als die Anzahl der vorhandenen Dezimalen erlaubt, so hängt man rechts oder links Nullen an. Z. B. das Comma in dem Dezimal-Bruche 32,08 soll, damit derselbe zehntausendmal größer werde, um vier Stellen nach Rechts geschoben werden; man hänge vor allem dem Dezimal-Bruche 32,08 drei Nullen zur Rechten an, so erhält man: 32,08000, und nun rücke man, wie gefordert wurde, das Comma um vier Stellen nach Rechts, nämlich: 320800,0, so ist das Verlangte geschehen.

Oder man sollte im Dezimal-Bruche 8,237 das Comma um drei Stellen nach Links rücken, so hänge man zur Linken zuvor drei Nullen an; man erhält 0008,237, welcher Bruch von 8,237 um nichts verschieden ist, und rücke dann das Comma um die 3 Stellen nach Links; man erhält 0,008237, welcher Bruch tausendmal kleiner ist, als 8,237, indem

$$8{,}237 = \frac{8237}{1000}$$

$$0{,}008237 = \frac{8237}{1000000}$$

§. 110.

Dezimal-Brüche zu addiren.

Sollten die beiden Dezimal-Brüche 8,237 und 25,78921 addirt werden, so könnte man ihnen vor allem gleiche Benen-

Bayerische Staatsbibliothek München
Digitized by Google

nung verschaffen. Man erhält 8,23700 und 25,78921; addirt man nun die Zähler, nämlich: 823700 und 2578921 und setzt unter die Summe den gemeinschaftlichen Nenner 100000 oder schneidet, was dasselbe ist, in der Summe der Zähler fünf Dezimalen ab, so viele als nämlich jeder der Summanden hat — so ist die Summe der Brüche $\frac{3402621}{100000}$ oder 34,02621.

Ganz eben so würde man verfahren, wenn mehr als zwei Summanden zu addiren wären, z. B.

$$0{,}03 + 8{,}209 + 2{,}2 + 0{,}000023$$

Hiefür setze man:

$$0{,}030000 + 8{,}209000 + 2{,}200000 + 0{,}000023$$

Rechnung.

$$\begin{array}{r} 0{,}030000 \\ 8{,}209000 \\ 2{,}200000 \\ 0{,}000023 \\ \hline 10{,}439023 \end{array}$$

oder wenn man die End-Nullen, welche keinen Einfluß auf die Größe der Summe haben, wegläßt;

$$\begin{array}{r} 0{,}03 \\ 8{,}209 \\ 2{,}2\,\vdots\,\vdots \\ 0{,}000023 \\ \hline 10{,}439023 \end{array}$$

woraus nun leicht ersichtlich ist, daß für die Addition von Dezimal-Brüchen folgende Vorschrift gegeben werden kann.

Man schreibe, wenn zwei oder mehrere Dezimal-Brüche zu addiren sind, dieselben so unter einander, daß sowohl die Comma als auch die gleichweit von dem Comma nach Rechts und Links abstehenden Ziffern senkrechte Reihen bilden, summire diese Reihen nach den Regeln der Addition und setze in der Summe das Comma gerade unter die Comma-Reihe der Summanden. Beispiel:

$$83{,}04 + 0{,}037 + 8{,}276 + 0{,}2 + 8{,}3$$

Digitized by Google

Rechnung.

83,04
0,037
8,276
0,2
8,3
99,853

Die hier angedeuteten punktirten Linien sind deßhalb nicht unrathsam, weil man dadurch sicherer ist, nicht im Addiren aus einer senkrechten Reihe in eine andere zu gerathen.

Kommen unter den Summanden ganze Zahlen vor, so kann man diese leicht auf die Form von Dezimal-Brüchen bringen und sie als solche behandeln, indem man hinter die ganze Zahl ein Comma und hinter dasselbe beliebig viele Nullen setzt. Nämlich 16 = 16,000 nämlich 16 Ganze, kein Zehntel, kein Hundertel u. s. f., woran Niemand Anstand nehmen wird. Beispiel:

82,37 + 15 + 0,0003 + 12

Rechnung.

82,37
15,0
0,0003
12,0
109,3703

§. 111.

Einen Dezimal-Bruch von einem andern zu subtrahiren.

Das Verfahren bei der Subtraktion eines Dezimal-Bruches von einem andern ist dem bei der Addition sehr ähnlich. Man verschaffe nämlich dem Minuend und Subtrahend durch Anhängung von Nullen gleiche Benennung, wenn ihnen diese nicht schon zukommt, setze sie dann wie ganze Zahlen unter einander und in der Differenz stelle man das Komma dahin, wo es im Minuend und Subtrahend seinen Platz behauptet, wie durch nachfolgende Beispiele nähere Erläuterung finden wird.

a) 325,2739 — 82,3092 = ?

Digitized by Google

Rechnung.

325,2739
82,3092
242,96647

also ist 242,96647 die verlangte Differenz.

b) 7,23892 — 5,361 = ?

Rechnung.

7,23892
5,36100
1,87792

Die beiden End-Nullen im Subtrahend hätten auch wegbleiben können, ohne den mindesten Einfluß auf die gesuchte Differenz.

c) 82,03 — 71,362 54 = ?

Rechnung.

82,03000
71,36254
10,66746

Demnach ist 10,66746 die verlangte Differenz.

d) 82376 — 0,823 = ?

Rechnung.

82376,000
0,823
82375,177

Hier mußte man den Minuend erst auf die Form eines Dezimal-Bruches bringen.

§. 112.

Dezimal-Brüche mit einander zu multipliziren.

Da Dezimal-Brüche von gemeinen Brüchen sich durchaus nicht dem Wesen, sondern nur der Bezeichnungs-Art nach unterscheiden, so gilt begreiflich für die Multiplikation von Dezimal-Brüchen dasselbe Gesetz, wie für gemeine Brüche: man multiplizire nämlich Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner, schreibe das Produkt der Zähler an, und drücke das Produkt der Nenner so aus, wie bei Dezimal-Brüchen eingeführt ist.

Es seien z. B. die beiden Dezimal-Brüche 8,2347 und 0,82 mit einander zu multipliziren.

Der Zähler des ersten ist 82347 und der des zweiten ist 82 und als Produkt beider Zähler findet man 6752454, welche Zahl der Zähler des gesuchten Produktes ist.

Digitized by Google

Der Nenner des einen Faktors 8,2347 ist 10000, der des andern Faktors 0,82 ist 100; also ist der Nenner des gesuchten Produktes: 10000 × 100 d. i. 1000000 nämlich, 1 mit so vielen Nullen, als deren im Nenner des einen und im Nenner des andern Faktors zusammengenommen vorkommen; da man nun diesen Nenner im Produkte nicht wirklich anschreibt, sondern nur durch die Anzahl der abgeschnittenen Dezimalen andeutet, so muß man offenbar im Produkte, welches durch Multiplikation der Zähler zum Vorschein kam, so viele Dezimalen abschneiden, als deren beide Faktoren zusammengenommen hatten, und das richtige Produkt wird seyn: 6,752454.

Daher gibt man für Multiplikation eines Dezimal-Bruches mit einem andern die Vorschrift:

Man multiplizire die Dezimal-Brüche mit einander ohne Rücksicht auf das Comma, wie ganze Zahlen und schneide im Produkte so viele Dezimal-Stellen ab, als im Multiplikand und Multiplikator zusammengenommen vorkommen.

Beispiele:

a) 3,782 × 0,0003 = ?

Rechnung.

3782
3
11346

Da hier in beiden Faktoren sieben Dezimal-Stellen zusammengenommen vorkommen, so ist das richtige Produkt: 0,0011346.

b) 89,2 × 1,003.

Rechnung.

1003
892
2006
9027
8024
894676

Hier kommen zusammen vier Dezimalen vor, daher das geforderte Produkt: 89,4676.

Sind mehr als zwei Faktoren vorhanden, so schneidet man im Produkte so viele Dezimalen ab, als in allen Faktoren zusammengenommen vorkommen, z. B.

3,002 × 2,12 × 0,00002 = ?

Digitized by Google

Rechnung.

$$\begin{array}{r} 3002 \\ \times\ 212 \\ \hline 6004 \\ 3002 \\ 6004 \\ \hline 636424 \\ \times\ 2 \\ \hline 1272848 \end{array}$$

Da hier im Ganzen zehn Dezimal-Stellen vorkommen, so muß man im Produkte eben so viele abschneiden, und man erhält 0,0 0 0 1 2 7 2 8 4 8; denn

$$3{,}002 \times 2{,}12 \times 0{,}00002 = \frac{3002}{1000} \times \frac{212}{100} \times \frac{2}{100000} = \frac{3002 \cdot 212 \cdot 2}{1000 \cdot 100 \cdot 100000} = \frac{1272848}{10000000000}$$

oder nach der Art ausgedrückt, wie bei Dezimal-Brüchen gebräuchlich ist: 0,0 0 0 1 2 7 2 8 4 8.

§. 113.

Division eines Dezimal-Bruches durch einen andern.

Es sey der Dezimal-Bruch 0,0 0 1 7 2 8 durch den Dezimal-Bruch 0,0 1 2 zu dividiren. Um das anzuwendende Verfahren zu finden, drücke man Dividend und Divisor wie gemeine Brüche aus, nämlich: $\frac{1728}{1000000} : \frac{12}{1000} = ?$

Der Leser wird sich erinnern, daß man einen Bruch durch einen andern dividirt, wenn man Zähler durch Zähler, Nenner durch Nenner dividirt, und die Quotienten in Bruchform anschreibt. Für vorliegenden Fall ist demnach:

$$\frac{1728}{1000000} : \frac{12}{1000} = \frac{1728 : 12}{1000000 : 1000} = \frac{144}{1000}$$

Also 0,0 0 1 7 2 8 : 0,0 1 2 = 0,1 4 4

Diesen Quotienten erhielt man, indem man den Dividend ohne Rücksicht auf das Comma durch den Divisor ebenfalls ohne Rücksicht auf das Comma dividirte und im Quotienten so viele Dezimal-Stellen abschnitt, als im Nenner des Dividend mehr Nullen, als im Nenner des Divisors, oder, was dasselbe ist, als im Dividend mehr Dezimalen vorkommen, als im Divisor.

Digitized by Google

Dieses Verfahren ließe sich, wenn nicht vollkommne Genauigkeit erforderlich wäre, auch in dem Falle anwenden, wo der Zähler des Dividend-Bruches nicht ohne Rest durch den Zähler des Divisor-Bruches dividirt werden kann z. B.

$$0{,}0146 : 0{,}06 = ?$$

Hier ist der Zähler 6 des Divisors im Zähler 146 des Dividend wohl 24mal enthalten; aber nicht genau, indem der Rest 2 bleibt; dessen ungeachtet begeht man keinen namhaften Fehler, wenn man setzt

$$0{,}0146 : 0{,}06 = \frac{146}{10000} : \frac{6}{100} = \frac{146 : 6}{10000 : 100}$$

$$= \frac{24}{100} = 0{,}24$$

Vernachläßigung des Restes bei der Division wird um so weniger schädlich, je größer der Quotient, oder je größer der Dividend im Verhältniß zum Divisor ist, z. B.

$3 : 2 = 1$; dieser Quotus 1 ist sehr unrichtig, weil 3 den Divisor 2 wenig an Größe übertrifft.

$13 : 2 = 6$ ist schon der Wahrheit näher, obgleich der Rest der nämliche ist, wie bei der ersten Division.

$325871 : 2 = 162935$ kann mit noch weit geringerem Fehler, bei dem nämlichen Reste 1, als richtig angenommen werden.

Wenn also bei der Division eines Dezimal-Bruches durch einen andern der Zähler des ersten nicht ohne Rest durch den Zähler des zweiten theilbar ist, so vergrößere man, um den unvermeidlichen Fehler unmerklicher zu machen, den Zähler des Dividends, was unbeschadet des Bruchwerthes durch Anhängung von Nullen zur rechten Hand geschehen kann z. B.

$0{,}789 : 0{,}79 = ?$

Rechnung.

79	789	9	Wollte man hier setzen:
	711		$0{,}789 : 0{,}79 = 0{,}9$
	78		

so wäre dieses Resultat zu ungenau, weil in der Division ein sehr großer Rest blieb, man hänge also dem Dividend einige

Digitized by Google

Nullen an, indem 0,789 = 0,789000. Nun ist 789000 : : 79 = 9987 mit dem Reste 27; also:

0,789000 : 0,79 = 0,9987, indem der Dividend um 4 Dezimal-Stellen mehr hat, als der Divisor.

Ueberhaupt kann man in jedem Falle, wo man es für nöthig findet, dem Dividend durch Anhängung von Nullen eine größere Anzahl von Dezimalen verschaffen, als deren der Divisor hat, und man kann nun aus den im Vorhergehenden auseinander gesetzten Gründen für die Division eines Dezimal-Bruches durch einen andern folgende allgemeine Vorschrift geben und in Anwendung bringen:

Um einen Dezimal-Bruch durch einen andern zu dividiren, verschaffe man dem Dividend durch Anhängung von Nullen mehr Dezimalen, als deren der Divisor hat, (wenn solches nicht bereits der Fall ist) dividire dann den Dividend durch den Divisor ohne Rücksicht auf das Comma, wie ganze Zahlen und schneide im Quotienten so viele Dezimalen ab, als deren der Dividend mehr hat, als der Divisor.

Je genauer man den Quotienten verlangt, um desto mehr muß die Anzahl der Dezimal-Stellen des Dividends die des Divisors übertreffen.

Ist für den Quotienten eine bestimmte Anzahl von Dezimalen verlangt, so muß der Dividend gerade um die verlangte Anzahl mehr Dezimalen haben oder erhalten, als deren der Divisor hat.

Beispiele:

a) 0,3754 : 1,23 =? soll auf drei Dezimalen gefunden werden.

Der Dividend hat vier Dezimalen und der Divisor zwei; der Ueberschuß ist zwei, da aber im Quotus drei Dezimalen gefordert werden, so hänge man dem Dividend eine Nulle als Dezimale an, nämlich:

0,37540 : 1,23 =?

Digitized by Google

Rechnung.

123	375,4,0,	305
	369	
	640	
	613	
	25	

Demnach ist, unter Vernachläßigung des Restes der Quotus = 0,305 und man weis, daß hier nicht um ein Tausendtel gefehlt seyn kann, weil die dritte Ziffer 5 Tausendtel bezeichnet.

b) 82,73 : 0,00023 =? und es seyen zwei Dezimalen im Quotus gefordert. Man muß vor Allem dem Dividend zwei Dezimalen mehr verschaffen, als deren der Divisor hat, man hänge also dem Dividend, dem zwei Dezimalen weniger zukommen, 2 + 2 Dezimalen an, so erhält man

82,73000 0 : 0,0023 =?

Rechnung.

82730000 : 23 = 3596,95 mit dem Reste 5, der vernachläßigt wird, demnach, weil der Dividend um zwei Dezimalen mehr hat, als der Divisor, ist der Quotus:

35973,95 d. i.

82,73 : 0,0023 = 3596,95

c) 182 : 0,03 =? auf 4 Dezimalen zu entwickeln. Man hänge dem Dividend, der bis itzt gar keine Dezimale hat, zwei und noch vier darüber an. Nämlich:

182,000000 : 0,03 =?

Rechnung.

182000000 : 3 = 60666666

Also: 182,000000 : 0,03 = 6066,6666

indem der Dividend vier Dezimalen mehr hat, als der Divisor.

§. 114.

Der vorige Satz auf andere Art dargestellt.

Sollte einem oder dem andern Leser obige Begründung nicht ganz so klar seyn, als er wünscht, so kann er sich von der Wahrheit der allgemeinen Vorschrift für die Division auch auf folgende Weise überzeugen. Wir wollen wieder obiges Beispiel wählen, nämlich:

0,001728 : 0,012 =?

Digitized by Google

Man mache, was ohne Werth-Veränderung des Quotienten geschehen kann, sowohl den Dividend als den Divisor 1000mal größer, indem man in beiden Brüchen das Comma um 3 Stellen nach rechts rückt, so erhält man durch die Division 1,728 : 12 den nämlichen Quotus, als ob man 0,001728 durch 0,012 dividirte, nun ist aber

$$1{,}728 : 12 = 0{,}144 \quad \text{indem offenbar}$$

$$\frac{1728}{1000} : 12 = \frac{1728 : 12}{1000} = \frac{144}{1000} = 0{,}144$$

wie oben. Auch läßt sich derselbe Satz so ableiten:

$$0{,}001728 : 0{,}012 = \frac{1728}{1000000} = \frac{12}{1000} =$$

$$= \frac{1728}{1000000} \times \frac{1000}{12} = \frac{1728 \cdot 1000}{1000000 \cdot 12} =$$

$$= \frac{1728 \cdot 1000}{12 \cdot 1000000} = \frac{1728}{12} \cdot \frac{1000}{1000000} =$$

$$= 144 \cdot \frac{1}{1000} = \frac{144}{1000} = 0{,}144 \text{ wie zuvor.}$$

§. 115.

Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Dezimalbruch.

Um einen gemeinen Bruch in einen Dezimal-Bruch von einer geforderten Anzahl von Dezimal-Stellen zu verwandeln, braucht man nur den Zähler des Bruches durch Anhängen so vieler Nullen, als Dezimalen gefordert werden, in einen Dezimalbruch zu verwandeln, und ihn dann durch den Nenner dividiren. Es soll z. B. der Bruch $\frac{3}{7}$ in einen Dezimal-Bruch von vier Dezimalen verwandelt werden. Offenbar ist $3 = 3{,}0000$ und also $\frac{3}{7} = \frac{3{,}0000}{7}$ oder $3{,}0000 : 7$

Digitized by Google

Rechnung.

7 30,0,0,0,	4285	Da hier der Dividend vier und der Divisor gar keine Dezimale hat, so müssen im Quotus 4285 vier Dezimalen abgeschnitten werden, und es ist $\frac{3}{7} = 0{,}4285$
28		
20		
14		
60		
56		
40		
35		
5		

Fernere Beispiele:

$\frac{1}{3} = 0{,}3333 \ldots .$

$\frac{5}{6} = 0{,}8333 \ldots .$

$\frac{2}{13} = 0{,}15384 \ldots$

§. 116.

Genauere Bestimmung von Quotienten durch Dezimal-Brüche.

Auf diese Weise können Divisionen, welche einen Rest lassen, für welche also der Quotus eine gemischte Zahl, z. B. $\frac{17}{8} = 2\frac{1}{8}$ ist, so weit fortgesetzt werden, als man will, indem man den dem Quotienten anzuhängenden Bruch in einen Dezimal-Bruch verwandelt, wie aus folgenden Beispiele erhellen wird: 191 : 17 = ?

Rechnung.

17	19,1,	11,235
	17	
	21	
	17	
	* 40	
	34	
	60	
	51	
	90	
	85	
	5	

* Hier wurden dem Reste 4 allmählig drei Nullen angehängt, und derselbe nach dieser Veränderung durch den Nenner oder Divisor 17 dividirt; was ganz das Nämliche ist, als ob man gesetzt hätte:

Digitized by Google

191,000 : 17 = ?

Nämlich:

17	19,1,0,0,0,	11235
	17	
	21	
	17	
	40	
	34	
	60	
	51	
	90	
	85	
	5	

Wonach man aber, da der Dividend um drei Dezimalen mehr hat, als der Divisor, den Quotus 11,235 erhält, wie oben.

§. 117.

Verwandlung von Dezimal-Brüchen in gemeine Brüche.

Die Methode, im Allgemeinen einen Dezimal-Bruch in einen gewöhnlichen zu verwandeln, ist ganz einfach: Man schreibe nämlich den Nenner des Dezimal-Bruches an, so daß er ausgedrückt ist, wie ein gemeiner Bruch, und bringe ihn auf seine kleinste Form, z. B. der Dezimal-Bruch 0,54 soll als gemeiner Bruch ausgedrückt werden:

$$0{,}54 = \frac{54}{100} = \frac{27}{50} = \text{und so in andern Fällen.*)}$$

§. 118.

Gedrängte Uebersicht der Lehre von den Dezimal-Brüchen.

1) Man schneidet, um Dezimal-Brüche auszudrücken, im Zähler von Rechts nach Links so viele Ziffern (Dezimalen) ab, als im Nenner hinter dem 1 Nullen vorkommen.

2) Man kann einem Dezimal-Bruche zur Rechten beliebig viele Nullen anhängen.

---

*) Erleichterungen bei diesem Geschäfte, Dezimal-Brüche in gemeine zu verwandeln, mögen hier, als nicht zu den wesentlicheren Sätzen der Arithmetik gehörig, übergangen werden.

Digitized by Google

3) Ein Dezimal-Bruch wird so oft 10mal größer oder kleiner, um so viele Stellen man das Comma nach Rechts oder Links rückt.

4) Dezimal-Brüche werden addirt, wenn man sie so unter einander schreibt, daß die Comma und alle gleichnamige Dezimal-Stellen senkrechte Reihen bilden, sodann auf gewöhnliche Weise addirt, und in der Summe das Comma unter die Reihe der Commata der Summanden setzt.

5) Um einen Dezimal-Bruch von einem andern zu subtrahiren, verschaffe man beiden gleich viele Dezimalen, subtrahire, wie bei ganzen Zahlen, und setze im Rest das Comma dahin, wo es im Minuend und Subtrahend steht.

6) Dezimal-Brüche werden mit einander multiplizirt, wenn man sie ohne Rücksicht auf das Comma mit einander multiplizirt, wie ganze Zahlen, und im Produkte so viele Dezimalen abschneidet, als in den Faktoren zusammengenommen vorkommen.

7) Um einen Dezimal-Bruch durch einen andern zu dividiren, verschaffe man, wo nöthig, dem Dividend mehr Dezimalen, als deren der Divisor hat, dividire dann ohne Rücksicht auf das Comma, wie bei ganzen Zahlen, und schneide im Quotus so viele Dezimalen ab, als der Dividend mehr, denn der Divisor, hat.

8) Ein gemeiner Bruch wird in einen Dezimal-Bruch von beliebig vielen Dezimal-Stellen verwandelt, wenn man dem Zähler so viele Nullen anhängt, als Dezimalen gefordert werden, ihn dann durch den Nenner dividirt, und im Quotus so viele Dezimalen abschneidet, als man dem Zähler Nullen angehängt hatte.

9) Ein Dezimal-Bruch wird in einen gemeinen Bruch verwandelt, wenn man seinen Nenner wirklich anschreibt und den Bruch dann auf die möglichst kleinste Form bringt.

Digitized by Google

VI. Abschnitt.

Rechnungs-Operationen mit benannten Zahlen.

§. 119.

Addition und Subtraktion eingliedriger benannter Zahlen.

Um gleichartige benannte Zahlen zu addiren, addire man sie, wie unbenannte Zahlen und gebe der Summe die Benennung, welche alle Summanden haben. z. B.

$$18 \text{ fl.} + 22 \text{ fl.} + 113 \text{ fl.} + 4 \text{ fl.} = ?$$

Es ist $18 + 22 + 113 + 4 = 157$, mithin ist die gesuchte Summe 157 fl. *)

Oder:

$8 \text{ Fud.} + 9 \text{ Fud.} + 11 \text{ Fud.} = (8 + 9 + 11) \text{ Fud.} = 28 \text{ Fud.}$ und so auch in andern Fällen.

Dagegen kann man 8 fl. und 7 kr, nicht in eine Summe zusammenfassen, wenn nicht die Gulden in Kreuzer verwandelt, oder die Kreuzer als Gulden ausdrückt, so daß man erhält:

$8 \cdot 60 \text{ Kr.} + 7 \text{ Kr.} = 480 \text{ Kr.} + 7 \text{ Kr.} = 487 \text{ Kr.}$ oder:

$$8 \text{ fl.} + \frac{7}{60} \text{ fl.} = 8\ \frac{7}{60} \text{ fl.} = \frac{487}{60} \text{ fl.}$$

Ganz ähnlich ist das Verfahren bei der Subtraktion einfacher gleichartiger benannter Zahlen, z. B.

$$16 \text{ Pf.} - 7 \text{ Pf.} = (16 - 7) \text{ Pf.} = 9 \text{ Pf.}$$

---

*) fl. vom lateinischen florenus, ein Gulden.

Digitized by Google

Dagegen kann man 8 Zoll von 9 Schuh nicht subtrahiren, wenn man nicht zuvor die Schuh in Zoll umwandelt oder die Zoll als Theile eines Schuh ausdrückt; nämlich:

$$9' - 8'' = 9.12'' - 8'' = 108'' - 8'' - 100''$$ *)

oder:

$$9' - 8'' = 9' - \frac{8'}{12} = 9' - \frac{2'}{3} = \frac{27'}{3} - \frac{2'}{3} = \frac{25'}{3}$$

und so in andern Fällen.

§. 120.

Multiplikation eingliedriger benannter Zahlen.

Eine einfache benannte Zahl mit einer unbenannten zu multipliziren, betrachte man die benannte Zahl wie eine unbenannte, multiplizire sie, wie eine solche mit dem unbenannten Faktor, und gebe dem Produkte die Benennung des Multiplikands, z. B. Es sollen 42 fl. mit 6 multiplizirt werden:

$$42 \times 6 = 252 \text{ also}$$

$$42 \text{ fl.} \times 6 = 252 \text{ fl.}$$

Eine benannte Zahl aber mit einer benannten multipliziren ist nicht möglich, wie bereits weiter oben gesagt wurde. Z. B. 8 fl. × 4 fl. = ? ist eine nicht lösbare Aufgabe.

Nähere Erläuterung werden wir in den Anwendungen der geometrischen Proportion bei der sogenannten Regeldetri finden, wo (jedoch nur scheinbar) benannte Zahlen mit einander multiplizirt werden.

§. 121.

Division eingliedriger benannter Zahlen.

Eine benannte Zahl z. B. 32 fl. durch eine unbenannte z. B. durch 4 dividiren, heißt diese 32 fl. in vier gleiche Theile theilen und einen davon setzen. Offenbar ist:

$$32 \text{ fl.} : 4 = 8 \text{ fl.}$$

denn 8 fl. viermal gesetzt geben 32 fl. oder 8 fl. × 4 = 32 fl.

---

*) ′ rechts ober einer Ziffer bedeutet Schuh,
″ in der nämlichen Stellung Zoll.

Digitized by Google

Eine benannte Zahl aber, z. B. 35 Klafter durch eine gleichnamige benannte z. B. durch 7 Klafter dividiren, heißt angeben, wie oft 7 Klafter in 35 Klaftern enthalten sind; der Quotus wird dann eine unbenannte Zahl, nämlich blos Ausdruck eines „wie oft" seyn:

$$35 \text{ Kl.} : 7 \text{ Kl.} = 5$$

denn $7 \text{ Kl.} \times 5 = 35 \text{ Kl.}$

So auch

$$118 \text{ fl.} : 2 = 59 \text{ fl.}$$

denn $59 \text{ fl.} \times 2 = 118 \text{ fl.}$

u. s. in andern Fällen.

Dagegen könnte man auf die Frage wie oft 7 Pfennig in 35 fl. enthalten seyen, nicht eher antworten, bis man die Gulden in Pfennige verwandelt, oder die Pfennige als Gulden-Theile ausgedrückt hätte, nämlich:

$$35 \text{ fl.} : 7 \text{ Pf.} = 35 \cdot 240 \text{ Pf.} : 7 \text{ Pf.} =$$
$$8400 \text{ Pf.} : 7 \text{ Pf.} = 1200$$

Wie oft aber 3 Ellen in 18 Fuder enthalten sind, kann begreiflicher Weise Niemand angeben.

Bei der Division benannter Zahlen können also übersichtlich folgende Fälle vorkommen:

a) Der Dividend ist benannt und der Divisor unbenannt — dann ist der Quotient eine benannte Zahl, wie der Dividend.

b) Der Dividend ist benannt und der Divisor hat die nämliche Benennung — dann ist der Quotus eine unbenannte Zahl.

c) Der Dividend und der Divisor sind benannt und die Benennung des einen ist verwandelbar in die Benennung des andern — dann nehme man die nöthige Verwandlung wirklich vor und der Quotient ist eine unbenannte Zahl.

d) Oder endlich ist der Dividend sowohl als der Divisor benannt, aber ohne gleichnamig zu seyn und gemacht werden zu können; dann ist Division nicht möglich.

Digitized by Google

§. 122.

Reduzible, irreduzible Einheiten.

Vergleichen wir die Einheiten, deren öftere Wiederholung durch benannte Zahlen ausgedrückt ist, so finden wir, daß Einheiten verschiedener Klassen vorkommen, deren höhere immer ein Vielfaches einer niederen ist; so ist z. B. der Gulden ein Vielfaches des Kreuzers, der bayerische Thaler ein Vielfaches des Sechsers, der Kreuzer ein Vielfaches des Pfennigs u. s. w.

Eine Einheit höherer Klasse kann hienach leicht in eine Einheit niederer Klasse verwandelt werden und umgekehrt z. B. 1 fl $=$ 1 $\times$ 10 Sechser oder 10 Sechser und 1 Sechser $= \frac{1}{10}$ fl.

Ferner:

8 Schuh $=$ (8 $\times$ 12) Zoll d. i. 96 Zoll und

8 Zoll $= \frac{8}{12}$ Schuh d. i. $\frac{2}{3}$ Schuh u. s. w.

Einheiten der Art nennt man reduzibel (v. reducere, zurückführen), weil die Benennung der einen auf die Benennung der andern gebracht werden kann.

Es gibt aber auch benannte Zahlen, die in gar keiner Beziehung zu einander stehen, die also nie auf gleiche Benennung gebracht werden können. Solche heißen in Bezug auf einander irreduzibel.

§. 123.

Verwandlungen benannter Zahlen.

Man soll 13 fl. 22 Kr. 3 pf. in Pfennige verwandeln.

1) Man multiplizire 13 mit 60, so sind die 13 fl. in Kreuzer verwandelt.

2) Hiezu addire man 22 und multiplizire mit 4, so sind die 13 fl. 22 Kr. in Pfennige umgesetzt.

Digitized by Google

3) Hiezu addire man die 3 Pfennige, die schon gegeben sind, so hat man alles in Pfennige verwandelt:

Rechnung.

fl.	Kr.	Pf.	
13	22	3	
× 60	+780	+3208	
780	802	3211	Pfennige.
	× 4		
	3208		Pfennige.

2) $18' \quad 3'' \quad 8'''$ *) sollen in Zoll verwandelt werden.

$$\begin{array}{r} 18' \quad 3'' \quad 8''' \\ \times \quad 12 \\ \hline 36 \\ 18 \\ \hline 216'' \\ +\ 3'' \\ \hline 219'' + \frac{8''}{12} \end{array}$$ oder $219\frac{2}{3}$ Zoll.

3) 2 Kronenthal. 1 fl. 3 Kr. 1 Heller sollen in Gulden verwandelt werden:

2 Kronenthal. sind 2 mal (2 fl. und 7 Sechser) oder $5\frac{4}{10}$ fl.

3 Kreutzer sind $\frac{3}{60}$ fl.

1 Heller ist $\frac{1}{480}$ fl. weil 480 Heller auf einen Gulden gehen.

Addirt man nun $5\frac{4}{10} + \frac{3}{60} + \frac{1}{480}$ oder $5\frac{2}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{480}$ fl. wirklich, so erhält man als Summe:

Digitized by Google

$5 + \frac{192 + 24 + 1}{480} = 5 + \frac{217}{480}$ oder $5\ \frac{217}{480}$ fl.

addirt man nun hiezu den Gulden der schon gegeben ist, so erhält man $6\ \frac{217}{480}$ fl. statt 2 Kronenth., 1 fl., 3 Kr. 1 Heller.

Sollten dagegen 38279 Pfennige in Gulden, Kreuzer und Pfennige ausgedrückt werden, so wäre folgende Rechnung zu führen:

1)
Pfennige.

```
4 | 38,2,7,9, | 9569 Kreuzer.
  | 36
  ----
    22
    20
    --
     27
     24
     --
      39
      36
      --
Rest  3 Pfennig.
```

2)
Kreuzer.

```
60 | 95,6,9, | 159 fl.
   | 60
   ---
    356
    300
    ---
     569
     540
     ---
Rest  29 Kreuzer.
```

Daher 38279 Pf. = 159 fl. 29 Kr. 3 Pf.; ähnlich ist das Verfahren in ähnlichen Fällen.

§. 124.

Addition mehrgliedriger benannter Zahlen.

Wenn verlangt würde, wir sollten nachstehende Geld-Summen in eine einzige zusammenfassen d. i. addiren,

(33 fl. 15 Kr. 2 pf.), ferner (108 fl. 3 pf.), dann (54 Kr. 1 pf.) endlich (10 fl. 31 Kr.),

so würden wir nicht unschlüssig seyn, welches Verfahren anzuwenden sey.

Digitized by Google

Wir addiren nämmlich alle Pfennige, alle Kreuzer, alle Gulden, kurz alle gleichnamigen Einheiten besonders, so erhalten wir 6 Pfennige, 100 Kreuzer und 151 Gulden. Da aber in der Summe der Pfennige ein Kreuzer enthalten ist, so sagen wir nicht 6 Pf. und 100 Kreuzer, sondern 2 Pf. und 101 Kr. — Da ferner in 101 Kr. 1 fl. enthalten ist, indem 101 Kr. = 1 fl. 41 Kr., so nennen wir als Summe 2 Pf. 41 Kr. und 152 fl.

Am Bequemsten verfahren wir demnach, wie folgt:

a) Wir stellen die Summanden so unter einander, daß die gleichnamigen Einheiten senkrechte Reihen bilden.

b) Nun fassen wir, bei der niedrigsten Einheiten-Klasse zur Rechten anfangend, diese in den Summanden vorkommenden Einheiten in eine Summe zusammen.

c) Wenn in dieser Summe die Einheit nächst höherer Klasse ein- oder mehreremal enthalten ist, so dividire man dieselbe durch die Zahl, welche durch die Menge ihrer Einheiten angibt, wie viele Einheiten dieser Klasse in einer Einheit nächst höherer Klasse enthalten sind. Hat man z. B. Gulden, Kreuzer und Heller, und es ergab sich als die Menge aller vorhandenen Heller die Summe 81, so muß man diese durch 8 dividiren, weil 8 Heller auf einen Kreuzer gehn.

d) Den Quotienten, den man durch diese Division erhält, addire man zu der Summe der nächsthöheren Einheiten, den Rest aber schreibe man unter die Reihe der niedern Einheiten, die man summirt hat.

e) Eben so addire man nun die Menge der zweithöheren Einheiten, und beziehe diese Summe wieder auf die dritthöhere Klasse u. s. f.

Beispiele.

1) (81 fl. 3 Kr. 1 Pf.) + (3 fl. 15 Kr. 1 Heller) + (7 fl. 3 Pf.) + (51 Kr. 1 Heller.) + 25 fl.

Digitized by Google

Rechnung.

fl.	Kr.	Pf.	Hll.	
81	3	1		2 Hll. = 1 Pf. 0 H.
3	15		1	
7		3		5 Pf. = 1 Kr. 1 Pf.
	51		1	70 Kr. = 1 fl. 10 Kr.
25				
117	10	1	"	

Demnach 117 fl. 10 Kr. 1 Pf. die richtige Summe.

2) $(33' 8'' 3''') + (5' 3'' 11''') + (105' 9'' 9''') + (8'' 1''') + 9'''$

Rechnung.

′	″	‴
33	8	3
5	3	11
105	9	9
	8	1
		9
145′	6″	9‴

12 | 33‴ | 2″
24
9‴

12 | 30″ | 2′
24
6″

Hier wurden die durch Division erhaltenen 2″ zu der Summe der Zolle, und die eben so gewonnen 2′ zur Summe der Schuh gezählt, und so in andern Fällen.

§. 125.

Subtraktion mehrgliedriger benannter Zahlen.

Das Verfahren bei der Subtraktion zusammengesetzter benannter Zahlen von benannten, ist dem bei der Addition ähnlich; nur beim Entlehnen einer höheren Einheit für eine niedere Klasse muß man zu der bereits im Minuend vorhandene Einheiten-Menge noch so viele Einheiten setzen, als vielmal diese niedere Einheit in jener höheren enthalten ist; auch jenes Entlehnen auf irgend eine Art z. B. durch einen Punkt andeuten, wie aus folgenden Beispielen erhellen wird.

Digitized by Google

1) (36 fl. 2 Kr. 3 Pf.) — (12 fl. 3 Pf. 1 Hell.) = ?

Rechnung.

Fl.	Kr.	Pf. (4)	Hll. (2)
36	2	3	0
12	0	3	1
24	1	3	1

Hier konnte 1 Hll. von 0 Hll. nicht abgezogen werden, wir entlehnten also einen Pf., so daß deren nur noch 2 vorhanden sind, und setzten statt dieses Pfennigs 2 Heller an die Stelle der Heller, worauf subtrahirt werden konnte.

3 Pf. von 2 Pf. ließ sich wieder nicht subtrahiren, es mußte daher ein Kreuzer entlehnt und in Pf. verwandelt werden u. s. f.

2) $(82' \; 8''') - (11' \; 9'' \; 9''') = ?$

Rechnung.

	(12)	(12)
82′	0″	8‴
11	9	9
70′	2″	11‴

Hier sollten 9‴ von 8‴ subrahirt werden, was nicht anging, einen Zoll konnte man nicht entlehnen, weil keiner da war, man entlehnte also einen Schuh, schrieb dafür 12″ an, entlehnte davon einen Zoll, daß nur noch 11 bleiben, und verwandelte diesen Zoll in 12‴, worauf der Subtraktion nichts mehr im Wege stand.

3) 48 fl. — (9 fl. 54 Kr. 3 Pf. 1 Hllr.) = ?

Rechnung.

Fl.	Kr. (60)	Pf. (4)	Hll. 2
48	0	0	0
9	54	3	1
38	5	0	1

Hier entlehnten wir einen Gulden, machten daraus 60 Kr., entlehnten davon einen, wechselten ihn in 4 Pf. um,

Digitized by Google

wovon wir wieder einen borgten und 2 Heller daraus machten, worauf die Subtraktion ausgeführt werden konnte.

§. 126.

Eine mehrgliedrige benannte Zahl mit einer unbenannten zu multipliziren.

Wenn uns die Aufgabe gemacht wäre, die Geld-Summe 3 fl. 2 Kr. 1 Pf. mit 3 zu multipliziren, so würden wir ohne Anstand als Produkt angeben: 9 fl. 6 Kr. 3 Pf.

Oder es sey 8 fl. 10 Kr. 2 Pf. mit 12 zu multipliziren, so wäre das Produkt 12mal 8 fl., 12mal 10 Kr. und 12mal 2 Pf.; oder 96 fl. 120 Kr. und 24 pf., wofür man passender setzen würde: 98 fl. 6 Kr.

Um also eine zusammengesetzte benannte Zahl mit einer unbenannten Zahl zu multipliziren, verfahre man, wie folgt:

1) Man ordne den Multiplikand so, daß die niederen Einheiten in gehöriger Ordnung den höhern folgen, z. B. nicht 32 Kr. 2 fl. 1 Hll. sondern 2 fl. 32 Kr. 1 Hll.

2) Den unbenannten Multiplikator stelle man rechts unter den Ausdruck der niedersten Einheiten, und multiplizire dieselben damit. Ist im Produkte die nächst höhere Einheit ein- oder einigemal enthalten, so dividire man dasselbe durch die Zahl, welche angibt, wie viele Einheiten dieser Klasse auf eine Einheit nächst höherer Klasse gehen. Den Quotus merke man sich einstweilen an, und den Rest schreibe man als niederste Einheiten-Menge des Produktes an.

3) Nun multiplizire man auch mit dem nämlichen Multiplikator die Menge nächst höherer Einheiten des Multiplikands, und addire zum Produkte den vorhin gemerkten Quotienten; die Summe dividire man nun durch die Zahl, welche anzeigt, wie viele Einheiten dieser Klasse in der jetzt nach Links folgenden Einheiten-Klasse enthalten sind; den Rest schreibe man als zweiten Theil des Produktes an und den Quotus addire man wieder zum nächsten Theil-Produkte.

Auf diese Weise fährt man nun von Rechts nach Links hin fort, bis alle Theile des Produktes gefunden sind., z. B.

Digitized by Google

13 Tage, 14 Stunden, 48 Minuten sollen mit 5 multiplizirt werden, oder nach der gewöhnlichen Bezeichnungs-Art:

$$\left(\begin{array}{ccc} \text{T.} & \text{St.} & \\ 13 & 14 & 48' \end{array}\right) \times 5 = ?$$

Rechnung.

T.	St.	′			
13	14	48		48′	
	×	5		5	
T.	St.	′	60	240′	4 St.
68	2	0		240	
			Rest	0′	

	St.	
	14	
	× 5	
	70 St.	
+	4 St.	
24	74 St.	3 T.
	72	
	2 St.	

Oder: (32 fl. 25 Kr. 3 Pf. 1 Hll.) × 6 = ?

Rechnung.

fl.	Kr.	Pf.	Hll.	
32	25	3	1	6 Hll. = 3 Pf.
		×	6	18 Pf. + 3 Pf. = 21 Pf. =
194	35	1	0	= 5 Kr. 1 Pf.

Kr. Kr.

25 × 6 = 150

150 Kr. + 5 Kr. = 155 Kr.

155 Kr. = 2 fl. 35 Kr.

32 fl. × 6 = 192 fl.

192 fl. + 2 fl. = 194 fl.

Aehnlich ist nun das Verfahren in ähnlichen Fällen.

§. 127.

Eine mehrgliedrige benannte Zahl durch eine unbenannte zu dividiren.

Sollte die zusammengesetzte benannte Zahl 49 fl. 13 Kr. 3 Pf. durch die unbenannte Zahl 6 dividirt werden, so könnte man etwa die ganze Geld-Summe auf Pfennige reduziren, die Menge dieser Pfennige durch 6 dividiren, und den Quotienten wieder auf Gulden, Kreuzer und Pfennige reduziren, nämlich: (49 fl. 13 kr. 3 pf.) : 6 = ?

Digitized by Google

Rechnung.

49 fl.	6 | 11,8,1,5, | 1969 Pf.	
× 60	6	
2940 Kr.	58	
+ 13	54	$+\frac{1}{6}$ Pf.
2953 Kr.	41	
× 4	36	
11812 Pf.	55	
+ 3	54	
11815 Pf.	1	

Diese 1969 $\frac{1}{6}$ Pfennige verwandle man nun wieder in die darin enthaltenen höhern Einheiten, wie folgt:

Pf.
4 | 19,6,9 $\frac{1}{6}$ | 492 Kr. und übrig bleiben $1\frac{1}{6}$ pf.
16
36
36
9
8
1 Pf.

Kr.
Ferner: 60 | 492 | 8 fl. und übrig bleiben
480 | 12 Kr.
12 Kr.

Also ist der gesuchte Quotient:

8 fl. 12 Kr. $1\frac{1}{6}$ Pf.

Man ersieht aber, daß diese Methode etwas umständlich ist, daher soll eine einfachere gezeigt werden, welche ihre Erläuterung an demselben Beispiele finden wird.

(49 fl. 13 Kr. 3 pf.) : 6 = ?

Digitized by Google

Rechnung.

	fl.	Kr.	Pf.	fl.	Kr.	Pf.
6	49	13	3	8	12	1 $\frac{1}{6}$
	48	+60	+4 Pf.			

	1 fl.	73,	7	
×	60	6	6	
	60 Kr.	13	1 Pf.	
		12		
		1 Kr.		
		× 4		
		4 Pf.		

Hier wurde 49 fl. durch 6 dividirt, der Quotus ist 8 fl., der Rest 1 fl.

Dieser Rest wurde in Kreuzer verwandelt, und zu den bereits vorhandenen 13 Kreuzern addirt.

Die Summe 73 wurde wieder durch 6 dividirt, der Quotus 12 ist der zweite Theil des gesuchten Quotus, der Rest ist 1 Kr.

Dieser Rest wird in Pfennige verwandelt und zu den schon gegebenen 3 pf. addirt.

Die Summe 7 dividirt man wieder durch 6 so ist 1 $\frac{1}{6}$ der letzte Theil des gesuchten Quotienten.

Anderes Beispiel.

Welches ist wohl der sechste Theil des Jahres, dessen mittlere Dauer 365 Tage 5 Stunden 48′ 47″, 8 beträgt.

Nämlich: $(365^{\text{Tg.}}\ 5^{\text{St.}}\ 48'\ 47,''8) : 6 = ?$

Digitized by Google

Rechnung.

	Tg.	St.	′	″	Tg.	St.
6	36,5	5	48	47,8	60	20
	36	120 St.	300′	42		
	×5	12,5,	348,′	5,8	58′	7,″9
	0	12	30	5,4		
	Rest 5	×5	48	0,4		
	× 24	0	48			
	120 St.	5				
		× 60				
		300′				

Der sechste Theil des Jahres beträgt also genau: 60 Tage, 20 Stunden, 58 Minuten, 7,9 Sekunden.

§. 128.

Eine mehrgliedrige benannte Zahl durch eine mehrgliedrige benannte zu dividiren.

Es kann aber auch gefragt werden, wie oft 3 fl. 15 kr. in 118 fl. 45 kr. enthalten seyen. In diesem Falle wird man Dividend und Divisor auf gleiche Benennung bringen, und dann dividiren, als wären beide Zahlen unbenannt; der Quotus ist eine unbenannte Zahl, nämlich:

(118 fl. 45 Kr.) : (3 fl. 14 Kr.) = ?

Hier ist 118 fl. 45 Kr. = 7125 Kr.

Ferner 3 fl. 14 Kr. = 194 Kr.

und $7125^{\text{Kr.}} : 194^{\text{Kr.}} = 36\frac{141}{194}$

welche gemischte Zahl der richtige Quotient ist, indem sie ausdrückt, wievielmal die Geld-Summe 3 fl. 14 Kr. oder 194 Kr. in der Geld-Summe 118 fl. 45 Kr. oder in 7125 Kr. enthalten sey.

§. 129.

Eine mehrgliedrige benannte Zahl mit einem Bruche zu multipliziren oder zu dividiren.

Wenn eine mehrgliedrige benannte Zahl mit einem Bruche multiplizirt werden soll, so multiplizirt man sie mit

Digitized by Google

dem Zähler des Bruches und dividirt sie durch seinen Nenner z. B.

$$(8 \text{ fl. } 9 \text{ Kr.}) \times \frac{2}{3} = ?$$

Rechnung.

(8 fl. 9 Kr.) × 2 = 16 fl. 18 Kr.
(16 fl. 18 Kr.) : 3 = 5 fl. 26 Kr.

Um dagegen eine mehrgliedrige benannte Zahl durch einen Bruch zu dividiren, multiplizire man dieselbe mit dem Nenner des Bruches und dividire sie dann durch dessen Zähler z. B.

Pfd. Lth. Qt.

$$(8 \quad 14 \quad 3) : \frac{4}{5} = ?$$

Rechnung.

Pfd. Lth. Qt.
(8 14 3) × 5 = 42 Pfd. 9 Lth. 3 Qt.

Pfd. Lth. Qt.
(42 9 3) : 4 = 10 Pfd. 18 Lth. $1\frac{3}{4}$ Qt.

Kommt eine gemischte Zahl als Multiplikator oder Divisor vor, so bringt man erstere unter die Form eines uneigentlichen Bruches und verfährt wie vorhin.

§. 130.

Behandlung von Dezimal-Brüchen in Rechnungen mit benannten Zahlen nebst fernern Beispielen.

Sollten benannte Zahlen in der Form von Dezimal-Brüchen vorkommen, oder mit Dezimal-Brüchen multiplizirt oder durch solche dividirt werden, so wird aus den in der Lehre von den vier Stammrechnungs-Arten und von den gemeinen und Dezimal-Brüchen aufgestellten und begründeten Sätzen das jedesmalige Verfahren leicht zu finden seyn, wie nachstehende Beispiele lehren.

32,′ 73 : 0, 35 = ?

Digitized by Google

Der Genauigkeit halber hänge man dem Dividend 32′, 73 noch zwei Nullen an, und dividire dann, wie überhaupt bei Dezimal-Brüchen geschehen muß, nämlich:

$$327300 : 35 = 9351$$

Da nun der Dividend um 2 Dezimalen mehr hat, als der Divisor, so schneidet man im Quotus zwei Dezimal-Stellen ab, so daß 93,51 der richtige Quotus ist.

Fernere Beispiele:

1) $\left(\begin{matrix}\text{Pfd.} & \text{Lth.} & \text{Qt.}\\ 18 & 23 & 3\frac{3}{4}\end{matrix}\right) \times 3\frac{1}{5} = ?$

Rechnung.

$$3\frac{1}{5} = \frac{16}{5}$$

$$\left(\begin{matrix}\text{Pfd.} & \text{Lth.} & \text{Qt.}\\ 18 & 23 & 3\frac{3}{4}\end{matrix}\right) \times 16 = \left(\begin{matrix}\text{Pfd.} & \text{Lth.} & \text{Qt.}\\ 18 & 23 & \frac{15}{4}\end{matrix}\right) \times$$

$$\times 16 = \begin{matrix}\text{Pfd.} & \text{Lth.} & \text{Qt.}\\ 299 & 31 & 0\end{matrix}$$

$$(\begin{matrix}\text{Pfd.} & \text{Lth.} & \text{Qt.}\\ 299 & 31 & 0\end{matrix}) : 5 = 59 \text{ Pfd. } 31\frac{4}{5} \text{ Lth.} = 59 \text{ Pfd. } 31 \text{ Lth. } 3\frac{1}{5} \text{ Qt.,}$$

welches das gesuchte Resultat ist.

2) $18\frac{3}{7}$ fl. : (1 fl. 3 Kr. 1 Pf.) = ?

Rechnung.

$$18\frac{3}{7} \text{ fl.} = \frac{129}{7} \text{ fl.}$$

$\frac{129}{7}$ fl. $\times$ 240 = $\frac{30960}{7}$ Pf., indem 240 Pfennige auf einen Gulden gehn.

Eben so verwandle man den Divisor in Pfennige, nämlich:

1 fl. 3 Kr. 1 Pf. = 253 Pf.

Digitized by Google

Endlich dividire man $\frac{30960}{7}$ Pf. durch 253 Pf. Man erhält nach Vorschriften aus der Lehre von den Brüchen:

$$\frac{30960}{7} : 253 = \frac{30960}{7.253} = \frac{30960}{1771}$$

und wenn man den Zähler wirklich durch den Nenner dividirt, erhält man als den gesuchten Quotienten: $17\frac{853}{1771}$ und so in andern Fällen.

Digitized by Google

VII. Abſchnitt.

Einige Anwendungen der bisher vorgetragenen Lehren auf die Berechnung verſchiedener im Intereſſe des gemeinen Lebens und der Wiſſenſchaft vorkommenden Aufgaben.

§. 131.

Vorerinnerung.

Da wir nun im Stande ſind, die Stamm-Rechnungs-Operationen, welche mit ganzen Zahlen und Brüchen, mit unbenannten und benannten Zahlen vorgenommen werden können, wirklich auszuführen, ſo kann es uns auch nicht ſchwer fallen, ohne Zuhülfnahme vieler das Gedächtniß beſchwerender und die Denkkraft unbeſchäftigt laſſender Regeln und Vorſchriften eine Menge von Aufgaben zu löſen, die uns im Intereſſe höhern und niedern Wiſſens vorgelegt werden können.

In vielen Rechenbüchern werden dem Leſer eine namhafte Anzahl von Regeln und eigenthümlichen Rechnungen, oft unter barbariſch klingenden Namen vorgelegt, z. B. Regel de Tri, Regel de quinque, septem, novem etc., verkehrte Regel de Tri, Ketten-Regel, regula falsi, Geſellſchafts-Rechnung u. ſ. w.

Einige davon ſind zu intereſſant, und gewähren zu viel Bequemlichkeit, als daß wir dieſelben nicht weiter unten, nachdem wir die Lehre von den Verhältniſſen und Proportionen aus der Lehre von den Gleichungen werden abgeleitet haben, einer näheren Betrachtung unterziehen ſollten.

Der Leſer wird ſich aber überzeugen, daß ſehr viele Aufgaben, die nach jenen Regeln gelößt zu werden pflegen, bei einigem Nachdenken aus den bis jetzt vorgetragenen Sätzen ihre Löſung finden können, wobei der Leſer den nicht unwich-

Digitized by Google

tigen Vortheil hat, daß er bei Lösung solcher Aufgaben ohne Anwendung auswendig gelernter und Rezeptartig gegebener Regeln seinem Geiste höhere Ausbildung durch Uebung zuführt und eben hiedurch ein sehr reines Vergnügen schöpft.

§. 132.

Aufgaben, welche gewöhnlich durch die Regel de Tri in ihren verschiedenen Modifikationen gelöst werden.

Erste Aufgabe.

Was kosten 119 Bouteillen Wein, wenn man 8 Bouteillen dieser Sorte um 12 fl. 16 kr. kaufte.

Auflösung.

8 Bouteillen kosten . . . . . 12 fl. 16 Kr.
1 Bouteille kostet also gewiß 8mal weniger,
demnach (12 fl. 16 kr.) : 8 oder . . . . . 1 fl. 32 Kr.
119 Bouteillen kosten demnach 119mal mehr
d. i. (1 fl. 32 kr.) $\times$ 119 . . . . . 182 fl. 28 Kr.

Zweite Aufgabe.

Was tragen 8950 fl. auf 4 p. c. ausgeliehen *) jährlich ein?

Auflösung.

100 fl. sollen jährlich 4 fl. einbringen; hätte man nur 1 fl. ausgeliehen, so würde man am Ende des Jahres an Zinsen nicht 4 fl., sondern hundertmal weniger, nämlich: $\frac{4}{100}$ fl. haben fordern können. $\frac{4}{100}$ ist also der Jahres-Ertrag von 1 fl., um demnach den gesuchten Jahres-Ertrag von 8950 fl. zu gewinnen, darf man nur $\frac{4}{100}$ oder $\frac{1}{25}$ mit 8950 multipliziren, denn sicherlich tragen 8950 fl. jährlich 8950mal mehr, als 1 fl. Nun ist aber $8950 \times \frac{1}{25} = 358$ fl.

*) Ein Capital auf 4 p. c. (pro centum zu deutsch: „für Hundert") ausleihen, heißt es unter der Bedingung zur Benutzung überlassen, daß der Empfänger dem Darleiher jährlich für jedes Hundert des Capitals 4 fl. bezahle.

Digitized by Google

oder in gedrängter Darstellung:

100 fl. tragen jährlich . . . . . 4 fl.

1 fl. trägt „ „ . . . . . $\frac{4}{100}$ fl.

1950 fl. tragen „ „ . . . . . 78 fl.

Dritte Aufgabe.

Zu wieviel p. c. muß man ein Kapital von 2540 fl. ausleihen, damit es jährlich 88 fl. 54 kr. eintrage.

Auflösung.

Hier muß man, weil nach den Procenten gefragt wird, auszumitteln suchen, welches der Jahres-Ertrag von 100 fl. ist, und diesen wird man leicht berechnen können, wenn man weis, was 1 fl. einbringt.

2540 fl. sollen jährlich tragen 88 fl. 54 kr. oder $88\frac{9}{10}$ fl., (weil 54 kr. so viel als 9 Sechser ausmachen). Demnach trägt 1 fl. 2540mal weniger; man muß also $88\frac{9}{10}$ durch 2540 dividiren, man erhält

$$88\frac{9}{10} : 2540 = \frac{889}{10} : 2540 = \frac{889}{25400}$$

Diesen Ertrag von 1 fl. multiplizire man mit 100, so erhält man den Ertrag von 100 fl. oder die Procente. Nämlich:

$$\frac{889}{25400} \times 100 = \frac{88900}{25400} =$$

$$= \frac{889}{254} = 3\frac{127}{254} = 3\frac{1}{2} \text{ p. c.}$$

Uebersichtlich:

2540 fl. tragen jährlich . . . . . $88\frac{9}{10}$ fl.

1 fl. trägt „ „ . . . . . $\frac{889}{25400}$ fl.

100 fl. tragen „ „ . . . . . $3\frac{1}{2}$ fl. oder p. c.

Digitized by Google

Vierte Aufgabe.

Eine Schanze auszuführen, brauchen 10 Schanzgräber 9 Tage, wie lange würden dazu bei gleicher Thätigkeit 15 derlei Arbeiter brauchen?

Auflösung.

10 Schanz-Gräber brauchen zur Vollendung der hier gegebenen Arbeit 9 Tage lang, 1 Schanzgräber würde also offenbar 10mal länger, d. i. 90 Tage lang brauchen, und nun wird leicht auszumitteln seyn, in wie vielen Tagen 15 Gräber mit der Arbeit fertig werden; sie brauchen nämlich 15mal wenigere Tage, als ein Arbeiter. Da nun ein einziger 90 Tage braucht, so werden 15 in 90 : 15 d. ist in 6 Tagen fertig.

Uebersicht.

10	Schanz-Gräber	brauchen	. . . .	9	Tage.
1	"	"	"	90	Tage.
15	"	"	"	6	Tage.

Fünfte Aufgabe.

Ein Soldat sollte 8mal durch 300 Mann Spießruthen laufen. Er lief aber 20mal und bekam die ihm bestimmte Strafe; durch wieviel Mann war er gelaufen?

Auflösung.

Da der Sträfling 8mal durch 300 Mann laufen sollte, so ist klar, daß ihm 8mal 300 d. i. 2400 Ruthenstreiche diktirt wurden.

Um demnach die ihm zuerkannte Strafe durch einen einzigen Mann zu erhalten, hätte er, wenn doch gelaufen seyn sollte, an diesem Mann 2400mal vorüber gehen müssen. Er lief aber nur 20mal. Es mußten also so vielmal mehr Soldaten aufgestellt seyn, so vielmal 2400 größer ist als 20. Dieß wird durch Division ausgemacht, nämlich, 2400 : 20 = 120. Es waren also nicht ein sondern 120 Mann aufgestellt.

Sechste Aufgabe.

Wenn 6 Pferde in 8 Wochen 12 Zentner Heu brauchen, wieviel Zentner werden 24 Pferde in 15 Wochen brauchen?

Digitized by Google

Auflösung.

Vor Allem hat man auszumitteln, wieviele Centner Heu 1 Pferd wöchentlich braucht, und zwar folgende Weise:

6 Pferde brauchen in 8 Wochen . . . . 12 Cent.

1 Pferd braucht in 8 Wochen . . . . . 2 Cent.

1 Pferd braucht in 1 Woche $\frac{2}{8}$ oder $\frac{1}{4}$ Cent.

24 Pferde brauchen in 1 Woche $\frac{24}{4}$ oder 6 Cent.

24 Pferde brauchen in 15 Wochen 6 . 15 oder 90 Cent.

Denn es ist klar, daß, wenn 6 Pferde in 8 Wochen 12 Cent. brauchen, 1 Pferd in derselben Zeit 6mal weniger, d. i. $\frac{12}{6}$ oder 2 Centner nöthig hat, daß ferner, wenn 1 Pferd in 8 Wochen 2 Centner braucht, es in 1 Woche mit einer 8mal geringeren Heu-Quantität, also $\frac{2}{8}$ oder $\frac{1}{4}$ Centner ausreichen wird u. s. w.

Siebente Aufgabe.

Ein Landmann brachte nach Abzug des Zehends 702 Garben in seine Scheune; wie viel Garben hatte ihm die Erndte im Ganzen getragen?

Auflösung.

90 Garben Einfuhr fordern 100 Garben Erndte.

1 Garbe Einfuhr fordert $\frac{100}{90}$ Garben Erndte.

702 Garben Einfuhr fordern $\frac{100}{90}$ 702 d. i. 780 Garb. Erndte.

Achte Aufgabe.

Wie lange muß ein Kapital zu $3\frac{1}{3}$ p. c. ausliegen, damit die Zinsen dem Kapitale gleich werden?

Auflösung.

100 fl. tragen jährlich . . . . . $3\frac{1}{3}$ fl.

Digitized by Google

Wenn die Zinsen dem Kapital gleichkommen sollen, so müssen sie 100 fl. ausmachen. So oft demnach $3\frac{1}{3}$ in 100 enthalten ist, so viele Jahre werden verstreichen, bis die Zinsen 100 fl. ausmachen, nämlich:

$$100 : 3\frac{1}{3} = 100 : \frac{10}{3} = \frac{300}{10} = 30 \text{ Jahre.}$$

Auf ähnliche Art können nun viele andre Aufgaben aufgelößt werden. Da jedoch diese Lösungen sich mittelst Proportionen und Gleichungen weit leichter und einfacher darstellen lassen, so sey dieses Thema erst dann wieder aufgenommen, wenn wir die Lehre von den gezählten Größen in dem Sinne, in welchem sie die Algebra darbiethet, genauerer Betrachtung unterzogen haben werden.

Digitized by Google

Algebra.

I. Abschnitt.

Bezeichnung und allgemeine Beziehungen von Buchstaben-Größe.

§. 133.

Bezeichnung bekannter und unbekannter Größen.

Was unter Algebra verstanden werden müsse, kam bereits in der Einleitung zur Arithmetik vor. — Bezüglich der allgemeinen Bezeichnung von Größen pflegt die Allgebra sich am liebsten der Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets zu bedienen, weil diese die geschmeidigste und in den kleinsten Raum drängbare Form haben. Doch nimmt man keinen Anstand, im Nothfalle auch die Buchstaben andrer Alphabete, z. B. des großen Lateinischen, besonders aber des kleinen griechischen Alphabets zu benutzen.

Größen die bekannt oder gegeben sind, bezeichnet man durch die vordern Alphabet-Buchstaben von a bis s, die gesuchten oder unbekannten Größen aber durch die letzten Alphabet-Buchstaben t, u, v, x, y, z, am häufigsten durch x, y z.

Gesetzt es würde gefragt:

Welche Zahl gibt durch a dividirt, den Quotienten b, so würde man diese Frage so ausdrücken:

$$x : a = b$$

oder

$$\frac{x}{a} = b$$

womit gesagt wäre, daß hier der Dividend gesucht oder unbekannt ist.

§. 134.

Coefficient einer Buchstaben-Größe.

Da uns bereits die Zeichen, wodurch die Stammrechnungs-Operationen angedeutet werden, bekannt sind, so kön-

Digitized by Google

nen wir Ausdrücke, wie z. B. $\frac{a + b - c}{d}$ sogleich in Zahlen verwandeln, sobald wir nur den Werth von den Größen a, b, c, d kennen. Gesetzt es wäre

$$a = 3 \quad c = 2$$
$$b = 5 \quad d = 12$$

so würde der Ausdruck

$$\frac{a + b - c}{d} \text{ den Werth } \frac{3 + 5 - 2}{12}$$

oder $\frac{6}{12}$ oder $\frac{1}{2}$ haben.

Eben so würde der Ausdruck $a + a + a + a + a$, wenn $a = 7$ wäre, den Werth $7 + 7 + 7 + 7 + 7$ oder 35 haben.

Statt daß wir aber die nämliche Größe a fünfmal hinter einander als Summanden setzen, würden wir viel bequemer verfahren, wenn wir die Buchstaben-Größe a nur einmal schrieben, und auf irgend eine Art andeuteten, daß sie fünfmal als Summand auftritt; dieß kann dadurch geschehen, daß man vor den Buchstaben a die Zahl 5 setzt, wodurch man statt $a + a + a + a + a$ erhält 5 a.

Diese Zahl, welche durch die Menge ihrer Einheiten anzeigt, wie oftmal die Größe a wiederholt als Summand auftreten soll, heißt Coeffizient der Buchstaben-Größe. So ist z. B. in 7 m die Zahl 7 der Coeffizient der Buchstaben-Größe m, und bedeutet, daß m siebenmal als Summand gesetzt werden soll.

Wenn im Ausdrucke $7 a + 3 b - 2 c$ die Größe a den Werth 6, b den Werth 5 und c den Werth 4 hat, so ist $7a + 3b - 2c = 7 . 6 + 3 . 5 - 2 . 4 = 42 + 15 - 8 = 49$, und so in andern Fällen.

§. 135.

Exponent einer Buchstaben-Größe.

Wenn eine Buchstaben Größe öfter als Faktor auftritt, wie z. B. die Größe a im Produkt $a . a . a . a . a$, so

schreibt man sie der Kürze halber nur einmal an, bezeichnet aber durch eine rechts über die Buchstaben-Größe gesetzte Zahl wieoftmal die Buchstaben-Größe als Faktor erscheint. So setzt man z. B.

a^3 statt a . a . a

a^5 statt a . a . a . a . a

b^7 statt b . b . b . b . b . b . b u. s. w.

Diese Zahl nun, welche durch die Menge ihrer Einheiten anzeigt, wie oftmal eine Buchstaben-Größe als Faktor vorkommt heißt Exponent der Buchstaben Größe.

§. 136.

Entgegengesetze Größen.

Wenn wir an einem auf ebnem Terrain befindlichen Wagen Pferde so anspannen, daß drei davon den Wagen nach vorn, zwei aber ihn nach hinten zu ziehen streben, und wir fragen dann, mit welcher Kraft sich der Wagen bewegt, so müssen wir wohl zugestehen, daß alle 5 Pferde sich um das Fortziehen des Wagens bemühen, aber wir sehen ein, daß, wenn alle Pferde gleiche Kraft äussern, die zwei welche hinten angespannt sind, das Bestreben zweier Pferde, welche den Wagen nach vorn wegzuziehen suchen, fruchtlos machen, so daß sich die Sache eben so verhält, als wäre vorn nur ein einziges Pferd angespannt.

Eben so, wenn uns Jemand zwei Kronenthaler schenkt dabei aber die Forderung macht 2 fl. 42 kr. Schulden für ihn zu bezahlen, so hat er uns eigentlich 3 Kronenthaler beigelegt, nämlich 2 Kronenthaler Baarschaft und 1 Kronenthaler Schulden, aber wir wissen recht gut, daß wir nur um einen einzigen Kronenthaler reicher geworden sind, weil der Kronenthaler Schulden einen Kronenthaler Besitzthum in Anspruch nimmt.

Größen der Art, von denen die eine, sobald man sie mit einer zweiten gleichartigen in ein Ganzes zusammenfassen

Digitized by Google

will, soviel von der anderen zerstört, als sie selbst beträgt, nennt man entgegengesetzte Größen.

Sind wir z. B. auf einer Leiter vom Boden an 27 Sproßen aufwärts und 13 Sproßen abwärts gestiegen, und es wird gefragt, wieviele Sproßen wir vom Boden entfernt sind, so zerstören die 13 Sprossen, die wir rückwärts steigen eben so viele, die wir emporgestiegen sind, und das Ganze, welches durch Zusammensetzung der 27 Sprossen auf- und 13 Sprossen abwärts gebildet wird, ist offenbar nur 14 Sprossen.

§. 137.

Bezeichnung entgegengesetzter Größen.

Da Addition und Subtraktion sich eben so gegenüber stehn, wie entgegengesetzte Größen, so pflegt man letztere im Ausdrucke dadurch von einander zu unterscheiden, daß man vor die eine von zwei entgegengesetzten Größen das Additions-Zeichen (+) und vor die andere das Subtraktions-Zeichen (—) setzt.

Diejenige von den beiden entgegengesetzten Größen, vor welcher das Additions-Zeichen steht, nennt man eine positive, die andere dagegen eine negative Größe.

An und für sich hat die positive und negative Größe gleiche Geltung, obschon in der Wortbedeutung „positiv" der Begriff von etwas Gesetztem (vom lateinischen ponere, setzen) und in dem Ausdrucke „negativ" der Begriff von etwas Verneintem (negare, läugnen, verneinen) liegt. Schulden, z. B. obgleich sie gewöhnlich als negative Größen aufgeführt werden, sind für den, der sie einzukassiren hat, etwas ganz positives; —

Auch kann eine Größe für sich allein weder positiv, noch negativ genannt werden, sondern nur dann erst, wenn sie mit einer andern in Beziehung tritt.

Daher ist es auch gleichgeltend, welche von zwei entgegengesetzten Größen man positiv und welche man negativ nennen will. Gebräuchlich ist es jedoch, wenn man einen ge-

Digitized by Google

wissen Zweck im Auge hat, diejenige Größe, welche diesem Zweck förderlich auftritt, positiv, und jene, welche hindernd einwirkt, negativ zu nennen.

Wenn wir z. B. nach den Vermögens-Verhältnissen eines Mannes fragen, so ist uns sein Besitzthum positiv und seine Schulden negativ. Oder wenn es sich darum handelt, daß ein Schiff von Neuyork aus ostwärts segle, so sind die zurückgelegten Meilen nach Osten hin positiv, der Weg nach Westen aber negativ und so in andern Fällen.

§. 138.

Verbindung entgegengesetzter Größen zu einem Ganzen.

Wer fünf Gulden besitzt und fünf Gulden Schulden hat, besitzt gar nichts, nämlich 5 fl. positiv und 5 fl. negativ mit einander in Beziehung gebracht und in ein Ganzes zusammengefaßt, geben Null oder heben sich gegenseitig.

Eben so, wer auf einer Leiter 5 Sprossen aufwärts und dann wieder 5 Sprossen abwärts steigt, ist 0 Sprossen vom Boden entfernt.

Mit andern Worten: eine positive und eine ihr gleiche negative Größe in ein Ganzes vereinigt, heben sich gegenseitig auf — zerstören einander.

7 fl. Besitzthum mit 3 fl. Schulden verbunden, gibt 4 fl. Vermögen, weil, nachdem die 3 fl. Schulden 3 fl. Besitzthum zerstört haben, doch noch 4 fl. Besitzthum übrig bleiben, was nun der resultirende Vermögens-Stand ist.

Wenn man aber 7 fl. Schulden mit 3 fl. Besitzthum in Verbindung bringt, so werden wohl durch die 3 fl. Besitzthum 3 fl. Schulden vertilgt, aber 4 fl. Schulden bleiben noch, als Vermögensstand, den man durch diese Verbindung von Schulden und Besitz kennen lernte.

Um also zwei entgegengesetzte Größen in ein Ganzes zu vereinigen, subtrahire man die kleineren von der größeren; der Rest wird positiv seyn, wenn die größere positiv war; er wird negativ seyn, wenn die größere negativ war, denn im

Digitized by Google

ersten Falle konnte das Positive, im zweiten das Negative nicht vollständig durch die Verbindung mit dem Entgegengesetzten zerstört werden. Eine positive Größe wird durch Verbindung mit einer kleineren negativen, wohl kleiner, kann aber dadurch nicht ganz zerstört werden, sondern behält ihren positiven Charakter, trotz des erlittenen Verlustes bei, das Umgekehrte ereignet sich, wenn eine negative Größe mit einer kleineren positiven in Verbindung tritt.

Auch wird Niemand zweifeln, daß 8 fl. Besitzthum und 9 fl. Besitzthum, in ihrer Verbindung und Verneinung 17 fl. Besitzthum, dagegen 11 fl. Schulden und 3 fl. Schulden, in ein Ganzes vereinigt, 14 fl. Schulden geben.

Um demnach zwei oder mehrere positive Größen in ein Ganzes zu vereinigen, addirt man sie nach den Regeln der Addition, und die Summe wird positiv seyn. Sind dagegen die zu vereinigenden Größen negativ, so ist begreiflich auch die Summe eine negative Größe.

§. 139.

Addition von Buchstaben-Größen, welche mit Vorzeichen behaftet sind.

Nun wird es dem denkenden Leser nicht schwer fallen, zu bestimmen, wie Größen, welche positiv oder negativ, d. i. mit den Vorzeichen + oder — behaftet sind, addirt werden.

Zwei oder mehrere Größen addiren, heißt nämlich, sie als Theile eines Ganzen betrachten, und dieses Ganze, in welche alle diese Theile *vereinigt* vorkommen, wirklich bilden und angeben.

Nun lassen sich aber entgegengesetzte Größen, ihrem Wesen nach, durchaus nicht vereinigen und verbinden, ohne daß sie zerstörend auf einander wirken, ohne daß die kleinere von der größeren so viel vernichtet, als sie selbst beträgt. In der Addition entgegengesetzter Größen ist also der Begriff von Subtraktion versteckt enthalten.

Digitized by Google

Es seyen z. B. die Größen + 7a und 5a (3 positive und 5 negative a) zu addiren, nämlich $(+7a) \overset{*}{+} (-5a) = ?$ wo das mit einem * versehene Zeichen zu vollziehende Addition andeutet, dagegen das + vor dem 7a anzeigt, daß 7a positiv ist.

Da die 5 negativen a eben so viele positive zerstören, so ist das aus der Vereinigung beider Größen erzeugte Ganze + 2a, dann so viele positive a läßt die zerstörende Einwirkung des andern (negativen) Summanden noch übrig, daher

$$(+7a) + (-5a) = +2a$$

Aus ähnlichen Gründen wäre

$$(-7a) + (+5a) = -2a$$

Dagegen unterliegt es keinem Zweifel, daß 11 positive und 5 positive a zusammengenommen 16 positive a geben, nämlich:

$$(+11a) + (+5a) = +16a$$

und aus dem nämlichen Grunde

$$(-11a) + (-5a) = -16a$$

Eben so $(+3b) + (+7b) + (+2b) = +12b$
und $(-3b) + (-7b) + (-2b) = -12b$
und so in andern Fällen.

Wir können also keinen Anstand nehmen, für die Addition von Buchstaben-Größen, welche mit Vorzeichen behaftet sind, folgende Vorschrift als gegründet anzunehmen:

Haben die Summanden gleiche Vorzeichen, so addire man die Coefficienten, setze hinter die Summe derselben die gemeinschaftliche Buchstaben-Größe und gebe der Summe das gemeinschaftliche Vorzeichen der Summanden. Haben aber die Summanden ungleiche Vorzeichen, so subtrahire man den Coefficienten des kleineren von dem des größeren, setze hinter die Differenz die gemeinschaftliche Buchstaben-Größe, und gebe der Differenz das Vorzeichen des größern Summanden.

Sind der Summanden mehr als zwei und ihre Vorzeichen theils gleich, theils verschieden, so addire man die positiven besonders und so auch die negativen besonders, und fasse dann die Summe der positiven und die Summe der negati-

Digitized by Google

den nach den so eben gegebenen Vorschriften in eine Haupt-Summe zusammen. Z. B.

+ 3a , + 7a sollen addirt werden die Summe ist (3 + 7) a oder 10a — 3a und — 7a geben zusammen — 10a + 8m und — 3m geben durch Addition vereinigt (8 — 3) m, d. i. + 5m — 8m und + 3m liefern die Summe (— 5m)

Sollen die Summanden + 9n , — 3n , + 12n , + 13n , — 27n in eine Summe vereinigt werden, so verfahre man so:

+ 9n
+ 12n } geben die Summe + 34n
+ 13n

Ferner: — 3n
— 27n } geben die Summe — 30n

Endlich + 34n und — 30n geben verbunden die Haupt-Summe + 64n

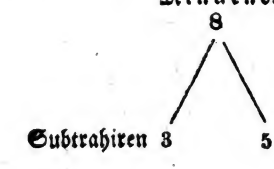
Ungleichartige Summanden z. B. + 8a , — 9p , + 39 können nicht in ein Ganzes vereinigt werden, sondern wir können nur andeuten, daß diese Vereinigung, wo möglich, vollzogen werden soll, indem wir als Summe setzen:

+ 8a — 9p + 3q.

§. 140.

Subtraktion entgegengesetzter Größen.

Wenn wir irgend eine Größe z. B. die Zahl 3 von einer andern z. B. von der Zahl 8 subtrahiren sollen, so müssen wir uns nothwendig 5 als einen Theil von 8 denken, diesen Theil wegnehmen, und den andern Theil 5, der mit 3 zusammengenommen den Minuend 8 gibt, angeben, nämlich:



Digitized by Google

Jede positive Größe kann in zwei oder mehrere Theile zerlegt werden, deren einer oder einige negativ sind. So können wir z. B. ein Vermögen von 5000 fl. uns bestehend denken aus 8000 fl. Besitzthum und 3000 fl. Schulden.

Ein Emporkommen auf einer Leiter, um 24 Sprossen vom Boden an, können wir uns entstanden denken durch 36 Sprossen Emporsteigen und 12 Sprossen Niedersteigen. Ferner können wir die Größe + 7a bestehend denken aus + 12a und — 5a. Eben so 18m = 22m — 4m und so in and. Fällen.

Eben so können wir uns vorstellen, eine negative Größe bestehe aus zwei oder mehreren Theilen, deren einer oder einige positiv sind. — Ein Vermögens-Stand z. B., der in 800 fl. Schulden besteht, kann durch 400 fl. Besitzthum und 1200 fl. Schulden gebildet seyn. Die Größe: — 9a kann aus den Theilen: + 4a und — 13a bestehend, gedacht werden. Ferner ist:

$$-2a = -5a + 3a$$
$$-129 = -169 + 49 \text{ u. s. w.}$$

Wenn wir demnach von einer Größe, sie sey positiv oder negativ, eine andre positive oder negative Größe wegnehmen (subtrahiren) sollen, so brauchen wir nur erstere, den Minuend, in zwei Theile zu zerlegen, deren einer der Subtrahend ist; diesen Theil streicht man dann weg, so ist der andre Theil die geforderte Differenz. Z. B.

1) + 3a werde subtrahirt von + 7a. 7a besteht aus den Theilen + 4a und + 3a. Streicht man den Theil + 3a weg, so bleibt + 4a als Differenz.

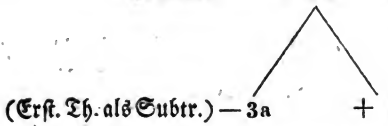
2) — 5a sey wegzunehmen von — 9a. Zerlegt man den Minuend — 9a in die beiden Theile — 5a und — 4a, und nimmt den Theil — 5a weg, so bleibt der andre — 4a als Rest.

Diese beiden Fälle sind sehr klar und lassen sich durch einen besondern Fall leicht erläutern. Niemand wird nämlich zweifeln, daß 4 fl. Besitzthum subtrahirt von 7 fl. Besitzthum als Rest, 3 fl. Besitzthum lassen. Eben so ge-

Digitized by Google

den 8 fl. Schulden, abgezogen von 17 fl. Schulden als Rest, 9 fl. Schulden.

3) — 3a sey abzuziehen von + 9a. Man zerlege den Minuend + 9a in zwei Theile; + 12a und — 3a, welche welche wirklich in ihrer Vereinigung + 9a geben. Streicht man nun den einen Theil (— 3a) weg, so bleibt als Rest der andre, nämlich + 12a; wie durch nachstehende Darstellung noch anschaulicher wird.



Auch findet die Sache durch ein Beispiel Erläuterung. Wer uns von unsrem Vermögensstande 100 fl. Schulden wegnimmt oder subtrahirt, hat uns den nämlichen Dienst erwiesen, als ob er uns 100 Gulden baar Geld oder Besitzthum zum Geschenke gemacht hätte.

Oder wenn ein Pferd einen mit zwölf Mehlsäcken beladenen Wagen bergan zieht, so besteht die Bewegung des Wagens aus zwei Theilen, nämlich:

a) Zugkraft des angespannten Pferdes.

b) Zugkraft, mit welcher die Schwere den Wagen bergabzurollen strebt (Roll-Kraft.)

Nimmt man nun das Gewicht von 5 Säcken weg, so nimmt dadurch die Bewegung des Wagens nicht ab, sondern sie verstärkt sich nach Seite des Pferdes hin.

4) + 4a sey zu subtrahiren von — 12a.

Man zerlege wieder den Minuend — 12a in zwei Theile, deren einer + 4a ist: nämlich in die Theile: — 16a und + 4a, welche zusammen — 12a ausmachen. Streicht man nun den Theil + 4a weg, so bleibt — 16a, als Rest.

Digitized by Google

Nämlich:

Minuend — 12 a als Ganzes

Subtrah. als erst. Th. des Minuends. + 4 a — 16 a Differenz als zweiter Theil des Minuends.

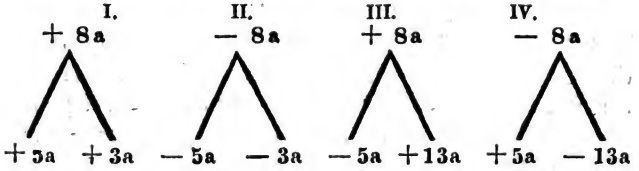
Wenn z. B. um das Gesagte an einem bekannten Falle zu erläutern, Jemand nach Vergleichung seiner Habschaft und seiner Schulden fand, daß sein Vermögens-Stand in 300 fl. Schulden besteht, und ihm wird nun 100 fl. baar Geld entwendet (subtrahirt), so ist nun sein Vermögens-Stand 400 fl., weil er jetzt um 100 fl. mehr schuldig bleiben muß, die er zuvor mit den nun entwendeten 100 fl. hätte decken können.

§. 141.

Regel für die Subtraktion von Größen, die mit Vorzeichen behaftet sind.

Diese Betrachtungen werden uns in den Stand setzen, das Verfahren auszumitteln, welches angewendet werden muß, um eine Größe, die mit Vorzeichen behaftet ist, von einer andern dergleichen zu subtrahiren. In Bezug auf die Vorzeichen sind nämlich 4 Fälle möglich, nämlich:

	I.	II.	III.	IV.
Minuend:	+ 8 a	— 8 a	+ 8 a	— 8 a
Subtrah.	+ 5 a	— 5 a	— 5 a	+ 5 a
Differenz:	+ 3 a	— 3 a	+ 13 a	— 13 a



Digitized by Google

Wo immer oben in der Mitte der Minuend, links unten der Subtrahend und rechts unten die Differenz steht.

Man ersieht, daß man immer das nämliche Resultat erhalten haben würde, wenn man das Vorzeichen des Minuends, in das entgegengesetzte verwandelt und dann nach den Gesetzen der Addition verfahren hätte, nämlich:

I.	II.	III.	IV.
+ 8a	— 8a	+ 8a	— 8a
+ 5a	— 5a	— 5a	+ 5a
—	+	+	—
+ 3a	— 3a	+ 13a	— 13a

Daher auch das für die Subtraktion aufgestellte Gesetz als wohlbegründet anzunehmen ist:

Um gleichartige Buchstaben-Größe von einander zu subtrahiren, verwandle man das Vorzeichen des Subtrahends in das entgegengesetzte und verfahre dann nach den Regeln der Addition. Wenn Minuend und Subtrahend nicht gleichartig sind, so kann man die zu vollziehende Subtraktion nur durch Veränderung des Vorzeichens des Subtrahends andeuten z. B.

$$(+ 8b) - (- 3c) = + 8b + 3c =$$

wo das mit * bezeichnete (—) das Subtraktions-Zeichen ist, das — aber vor der Buchstaben-Größe 3c andeutet, daß der Subtrahend negativ ist.

§. 142.

Entwicklung der Gesetze für die Multiplikation entgegengesetzter Größen.

Wenn uns die Forderung aufträte, wir sollten irgend eine Größe mit + 5 multipliziren, so hieße das sicherlich: wir sollen den Multiplikand 5mal setzen; oder 5mal zu sich selbst addiren. So ist z. B. (+ 8) × (+ 5) ohne Zweifel dem Produkte

+ 8 + 8 + 8 + 8 + 8 oder + 40 gleich.

Digitized by Google

Dagegen eine Größe mit (— 5) multipliziren, kann nichts anders heißen, als den Multiplikand fünfmal in entgegengesetzter Beziehung setzen. Ist er nämlich positiv, so soll er fünfmal negativ, ist er negativ, so soll er fünfmal positiv gesetzt werden. Die Größe (+ 8) multiplizirt mit (— 5) gibt demnach (— 40) und die Größe (— 8) multiplizirt mit (— 5) gibt das Produkt (+ 40) d. i.

$$(+ 8) \times (- 5) = - 40$$
$$(- 8) \times (- 5) = + 40$$

Wenn mit (— 5) multiplizirt werden soll, so liegt hierin nicht nur die Forderung: wie oft, sondern auch wie der Multiplikand gesetzt werden soll; ob nämlich so wie er ist, oder in entgegengesetzter Beziehung.

Der Leser wird sich das Gesagte noch mehr durch Anwendung auf einen besondern Fall aufklären, nämlich:

a) 8 fl. Vermögen 3mal gesetzt, gibt ohne Zweifel 24 fl. Vermögen, d. i.

$$(+ 8) \times (+ 3) = + 24$$

b) 8 fl. Vermögen 3mal, als das Gegentheil von Vermögen, oder als Schulden gesetzt, gibt 24 fl. Schulden, d. i.

$$(+ 8) \times (- 3) = - 24$$

c) 8 fl. Schulden 3mal als das gesetzt, was sie wirklich sind, geben 24 fl. Schulden d. i.

$$(- 8) \times (+ 3) = - 24$$

d) 8 fl. Schulden 3mal als das Gegentheil von dem gesetzt, was sie sind, geben 24 fl. Vermögen, da Vermögen oder reiner Besitz ohne Zweifel das Gegentheil von Schulden ist, oder

$$(- 8) \times (- 3) = + 24$$

Man ersieht leicht, daß in den Fällen, wo Multiplikand und Multiplikator gleiche Vorzeichen, beide (+) oder beide (—) haben, das Produkt eine positive, wo aber die Zeichen des Multiplikands verschieden sind, eine negative Größe ist.

Digitized by Google

§. 143.

Buchstaben-Größen mit einander zu multipliziren.

Nun wird unschwer zu ermitteln seyn, wie Buchstaben-Größen, die mit Vorzeichen behaftet sind, mit einander multiplizirt werden. Z. B.

7a sey zu multipliziren mit 3b.

Wäre a = 8 und b = 9, so erhielte man das Produkt $7 . 8 \times 3 . 9$ oder $7 . 3 . 8 . 9$, weil die Ordnung der Faktoren gleichgültig ist.

Wenn wir aber die Werthe von a und b nicht kennten, müßten wir als Produkt setzen $7 . 3 . a . b$. Da durch Weglassung des Punktes als Multiplikations-Zeichen kein Irrthum entsteht, so läßt man hier jedes Multiplikations-Zeichen zwischen Buchstaben ganz weg, und deutet die zu vollziehende Multiplikation durch unmittelbares Aneinanderreihen der Buchstaben an, wobei man jedoch die alphabetische Ordnung einzuhalten pflegt; demnach ist

$$7a \times 3b = 7.3ab = 21ab$$

Der Leser wird nun die Gültigkeit folgender Gesetze für die Multiplikation algebraischer Größen einsehen; nämlich

a) Gesetz für die Vorzeichen:

gleiche Vorzeichen der beiden Faktoren geben ein positives, ungleiche ein negatives Produkt.

b) Gesetz für die Coefficienten.

Die Coefficienten werden mit einander multiplizirt.

c) Gesetz für die Buchstaben.

Die Buchstaben werden in alphabetischer Ordnung hinter einander angereiht.

Beispiele:

1) $(+ 17m) \times (- 3n) = - 51mn$
2) $(- 18 bc) \times (- 8 de) = + 144 bcde$
3) $(- 3 ax) \times (- 8 by) = + 24 abxy$
4) $(+ 103 am) \times (+ 5) = + 515 am$

u. s. in and. Fällen.

Digitized by Google

§. 144.

Produkte aus mehr als zwei Faktoren zu bilden.

Es kann auch gefordert werden, ein Produkt aus mehr als zwei Faktoren zu bilden. Um aber dieser Forderung Genüge zu thun, ist nicht nöthig wieder neue Regeln festzustellen, wie aus folgenden Beispielen klar werden wird.

$$(+\ 7a) \times (+\ 3b) \times (+\ 8c) = ?$$

Dieses Produkt soll gebildet werden.

Man multiplizire zuerst den ersten Faktor mit dem zweiten, man erhält nach dem vorigen §. :

$$(+\ 7a) \times (+\ 3b) = +\ 21ab.$$

Dieses Produkt multiplizire man nun mit dem dritten Faktor, so erhält man:

$$(+\ 21ab) \times (+\ 8c) = +\ 168abc, \text{ demnach}$$

$$(+\ 7a) \times (+\ 3b) \times (+\ 8c) = +\ 168abc.$$

Oder nachstehende Faktoren sollten in ein Produkt vereinigt werden.

$$(-\ 3m) \times (-\ 2c) \times (-\ 8dx) = ?$$

Hier ist:

$$(-\ 3m) \times (-\ 2c) = +\ 6cm \text{ und dann}$$

$$(+\ 6cm) \times (-\ 8dx) = -\ 48cdmx.$$

Ferner:

$$(-\ 3ab) \times (-\ 2cx) \times (-\ 3y) \times (-\ 8z) = ?$$

$$(-\ 3ab) \times (-\ 2cx) = +\ 6abcx$$

$$(+\ 6abcx) \times (-\ 3y) = -\ 18abcxy.$$

$$(-\ 18abcxy) \times (-\ 8z) = +\ 144abcxyz$$

u. s. in andern Fällen.

§. 145.

Größen, die mit Vorzeichen behaftet sind, durch einander zu dividiren.

Schon in der Arithmetik erkannten wir, daß eine Zahl 35 durch eine Zahl 7 dividiren, nichts anders heißt, als die Zahl 35 in zwei Faktoren zerfällen, deren einer 7 ist, und den andern angeben. Dieser Begriff betrifft das Wesen der Division, und findet also auch hier Platz, wo Größen

Digitized by Google

durch einander dividirt werden, welchen Vorzeichen zukommen. Nämlich: (+ 35) : (+ 7) = ?

Man zerlege (+ 35) in zwei Faktoren, deren einer (+ 7) ist, so muß der andere nothwendig (+ 5) seyn, da (+ 7) × (+ 5) = + 35 wie folgendes Schema noch deutlicher macht:

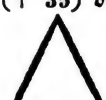
Dividend + 35 oder Produkt

Erster Faktor oder Divisor: + 7 + 5 zweit. Fakt. od. Quotus

Ferner: (+ 35) : (— 7) = ?

Zerlegt man wieder (+ 35) in zwei Faktoren, deren erster (— 7) ist, so muß der andere (— 5) seyn, denn das Produkt (— 7) × (— 5) gibt wieder den Dividend (+ 35) oder

Dividend (+ 35) oder Produkt



erster Faktor (— 7) (— 5) zweit. Fakt. oder Quotent

daher (+ 35) : (— 7) = — 5

Ferner: (— 35) : (— 7) = ?

Zerlegt man auch hier (— 35) in zwei Faktoren, deren erster (— 7) ist, so kann der andere nicht etwa (— 5) seyn, denn die beiden Faktoren (— 7) und (— 5) würden nicht, wie hier gefordert wird, den negativen Dividend: (— 35) sondern das positive Produkt (+ 35) geben, indem nach den Gesetzen der Multiplikation: (— 7) × (— 5) = + 35. Daher ist der andere Faktor oder der Quotient: (+ 5) und es ist (— 35) : (— 7) = + 5 und so in andern Fällen.

Man ersieht, daß in der Division, wie bei der Multiplikation bei gleichen Vorzeichen des Dividends und Divisors, der Quotient positiv, bei ungleichen aber negativ ist, wie folgende Uebersicht zeigt:

a) (+ 35) : (+ 7) = + 5 denn (+ 7) . (+ 5) = + 35
b) (+ 35) : (— 7) = — 5 denn (— 7) . (— 5) = + 35
c) (— 35) : (+ 7) = — 5 denn (+ 7) . (— 5) = — 35
d) (— 35) : (— 7) = + 5 denn (— 7) . (— 5) = + 35

Digitized by Google

Noch klarer wird dem Leser die Richtigkeit dieses, für die Vorzeichen-Bestimmung des Quotienten ausgesprochenen Gesetzes durch folgende Betrachtung werden. Wir wollen, statt aller vier Fälle, deren nur zwei herausheben:

$$(-35) : (+7) = ?$$

Nämlich, wie oft geht (+ 7) in (— 35) oder wie oftmal läßt sich (+ 7) aus (— 35) wegnehmen. Die Antwort „fünfmal" wäre nicht hinreichend; sagen wir aber (+ 7) läßt sich (— 5)mal von (— 35) wegnehmen, so heißt das doch nichts anderes, als:

(+ 7) läßt sich von (— 35) fünfmal in entgegengesetzter Beziehung wegnehmen, d. i. wenn man (+ 7) in (— 7) umwandelt, so kann man sodann dieses (— 7) fünfmal aus (— 35) wegnehmen, was auch gar keinem Zweifel unterliegt, indem — 7 — 7 — 7 — 7 — 7 zusammenaddirt, wirklich — 35 geben.

Ferner: $(-35) : (-7) = ?$

Dieser Fall ist weit einfacher, indem ohne Anstand 7 negative Einheiten in 35 negativen Einheiten 5mal enthalten sind, nämlich: $(-35) : (-7) = 5$. Statt 5 schlechtweg, kann man aber auch + 5 schreiben, so daß also wirklich $(-35) : (-7) = +5$.

§. 146.

Buchstaben-Größen durch einander zu dividiren.

Aus der Lehre von der Division erinnern wir uns noch, daß ohne Werthveränderung des Quotienten der Dividend und der Divisor beide gleich vielmal größer oder kleiner gemacht werden dürfen, z. B.

48 : 12 gibt den Quotus 4

aber der dritte Theil von 48 (oder 16) dividirt, durch den dritten Theil von 12 (oder durch 4), gibt den nämlichen Quotus 4.

Hätte man z. B. abx zu dividiren durch bdy, so mache man sowohl den Dividend, als den Divisor bmal klei-

Digitized by Google

ner, indem man in beiden den Faktor b wegläßt. Hiedurch wird man nothwendig den nämlichen Quotus gewinnen, als ob man das vollständige Produkt abx, durch das vollständige bdy dividirt hätte, nämlich der Quotient abx : bdy ist gleich dem Quotienten ax : dy, was, indem man nur ein anderes Divisions-Zeichen anwendet, auch so hätte ausgedrückt werden können:

$$\frac{abx}{bdy} = \frac{ax}{dy}$$

woraus nun unmittelbar die Regel fließt:

Buchstaben-Größen, die im Dividend und Divisor zugleich als Faktoren auftreten, werden beiderseitig gestrichen, oder weggelassen, z. B. $\frac{amxy}{bxy} = \frac{am}{b}$ indem hier in Zähler und Nenner die Größe xy als Faktor auftritt, und demnach beiderseitig weggelassen werden darf.

Wäre ferner $\frac{32abz}{8by}$ zu bilden, so kommt 8 und b sowohl im Dividend als im Divisor als Faktor vor, indem $\frac{32abz}{8by} = \frac{4.8.abz}{8by}$; läßt man also 8 und b im Dividend und Divisor zugleich weg, so erhält man

$$\frac{32abz}{8by} = \frac{4az}{y}$$

Daher die Vorschrift bezüglich der Coefficienten:

Wenn eine algebraische Größe durch eine andere dividirt werden soll, so dividire man den Coefficienten des Dividends durch den des Divisors.

Dieß geht aber nicht immer ohne Rest an, und oft ist auch der Coefficient des Dividends kleiner, als der des Divisors. Z. B. $\frac{5amn}{3mx} = ?$ Hier betrachte man $\frac{5}{3}$ als einen Bruch, den man nicht weiter reduziren kann, und daher unverändert läßt, nämlich: $\frac{5amn}{3mx} = \frac{5an}{3x}$

Digitized by Google

Oder: $\frac{3bz}{15by} = ?$ Hier betrachte man $\frac{3}{15}$ zwar ebenfalls als einen Bruch, reduzire ihn aber, indem man Zähler und Nenner durch 3 dividirt, und man erhält:

$$\frac{3bz}{15by} = \frac{z}{5y}$$

Ferner: $\frac{8ax}{16axx} = ?$ Man dividire Dividend und Divisor durch $8ax$; so erhält man $\frac{1}{2x}$; denn offenbar ist $8ax$ in $8ax$ 1mal enthalten.

Die bisher entwickelten Gesetze für die Division algebraischer Größen zusammengefaßt, sind demnach folgende:

a) Gleiche Vorzeichen des Dividends und Divisors bedingen einen positiven, ungleiche einen negativen Quotienten.

b) Die Coefficienten des Dividends und Divisors betrachte man als einen Bruch und bringe ihn auf die kleinste Form.

c) Buchstaben, die im Dividend und Divisor zugleich als Faktoren vorkommen, lasse man gegenseitig weg.

Digitized by Google

II. Abſchnitt.

Die vier Stammrechnungs-Arten mit zuſammengeſetzten algebraiſchen Größen.

§. 147.

Algebraiſche Ausdrücke und ihre Benennung.

Ein durch Buchſtaben allgemein dargeſtellter Größen-Ausdruck heißt ein algebraiſcher Ausdruck.

Einen nur durch einen einzigen Buchſtaben dargeſtellten Ausdruck nennt man einfach, z. B. $2a$, $5b$, — $8c$ u. ſ. w.

Ausdrücke, wie z. B. $\frac{8cdx}{9fy}$, $3xxz$ u. a., in welchen die einfachen Größen wohl durch Multiplikation und Diviſion, nicht aber durch Addition oder Subtraktion mit einander verbunden ſind, heißen eingliedrig.

Sind aber zwei oder mehrere derlei eingliedrige Größen-Ausdrücke durch die Rechnungs-Operation der Addition oder Subtraktion mit einander verbunden, ſo erhält man mehrgliedrige Größen-Ausdrücke. So iſt z. B. $5ab + 8c$ ein zweigliedriger, $7m - 3pq + 7xx$ ein dreigliedriger, $1 - 3c + 8d - \frac{x}{2y}$ ein viergliedriger Größen-Ausdruck, oder ſchlechtweg eine viergliedrige Größe.

Eingliedrige Größen kommen in Lehrbüchern über Algebra auch unter dem Namen Monomien vor, eine zweigliedrige Größe nennt man Binomium, eine dreigliedrige Trinomium, eine vielgliedrige Polynomium. Obgleich in dieſen gebräuchlichen Benennungen nichts Weſentliches liegt, ſo mußten ſie doch nicht übergangen werden, damit der Leſer bei dem Studium anderer mathematiſcher Werke nicht auf etwas ganz Unbekanntes ſtößt.

Digitized by Google

§. 148.

Vom Gebrauche der Klammern.

Wenn eine ganze mehrgliedrige Größe einer Rechnungs-Operation unterzogen werden soll, so schließt man dieselbe in Klammern ein. Z. B. $(8a - 3b + 7c) \times 9m$ bedeutet, daß die ganze dreigliedrige Größe $8a - 3b + 7c$ mit $9m$ multiplizirt werden soll. Schriebe man dagegen:

$8a - 3b + 7c \times 9m$, so würde dieser Ausdruck bedeuten, daß $3b$ von $8a$ subtrahirt, und zu dieser Differenz ein Produkt aus $7c$ in $9m$ addirt werden soll.

So bezeichnet ferner der Ausdruck $3(m + n) - (8m + 9n - q)$, daß die Summe der Größen $m + n$ dreimal gesetzt, sodann von derselben die ganze Größen-Verbindung $8m + 9n - q$ subtrahirt werden solle.

Ferner der Ausdruck $8(m - (n - q))$ gibt an, daß q von n subtrahirt, die Differenz von m subtrahirt, und diese zweite Differenz 8mal gesetzt werden solle.

Ferner ist

$$3(7 + 5(8 - (3 - 2))) = 3(7 + 5(8 - 1)) =$$
$$3(7 + 5.7) = 3(7 + 35) = 3.42 = 126.$$

u. s. f.

§. 149.

Gleichartige, ungleichartige Buchstaben-Größen.

Buchstaben-Größen nennt man gleichartig, wenn sie durch die nämlichen Buchstaben in der nämlichen Verbindung ausgedrückt sind, die Coefficienten und Vorzeichen mögen seyn welche sie wollen.

So sind z. B. die Größen

$+ 5a$, $- 7a$, $+ \frac{3}{4}a$ ferner die Größen

$+ 7(m - n)$, $- 8(m - n)$, $+ (m - n)$ dann die

Größen, $- \frac{a}{x}$, $+ \frac{2a}{x}$, $\frac{3a}{x}$ gleichartig.

Digitized by Google

Dagegen sind die Größen:

$$-5a, +3a^2, -7a^3 \text{ dann}$$
$$+7a, -3b, +8c \text{ u. s. w. ungleichartig.}$$

§. 150.

Addition mehrgliedriger Größen-Ausdrücke.

Zu addiren seyen die mehrgliedrigen Ausdrücke:
$3a + 2b - 8c$, $7a + 2c$, $3b - 8c$ und $a + b - c$*)

Man stelle die Summanden so unter einander, daß die gleichartigen Glieder senkrechte Reihen bilden, und fasse jede senkrechte Reihe in eine Summe zusammen. Alle diese Theil-Summen zusammengenommen geben die Total-Summe, nämlich:

$$\begin{array}{rrr} 3a & +2b & -8c \\ 7a & & +2c \\ & 3b & -8c \\ a & +b & -c \\ \hline 11a & +6b & -15c \end{array}$$

Kommen in den Summanden keine gleichartigen Glieder vor, so bleibt nichts übrig, als diese Glieder mit ihren Vorzeichen in alphabetischer Ordnung an einander zu reihen. Wären z. B. die zu addirenden mehrgliedrigen Größen folgende, $8a - 3x$, $5b + 8y$, $7c + v$ und $u - 3z$, so würde als Summe $8a + 5b + 7c - 3x + u + v\,3z$ sich darstellen.

Wenn einige Glieder gleichartig sind, so faßt man begreiflich diese gleichartigen in eine Summe zusammen. Hiedurch wird der neugebildete summatorische Ausdruck wenigere Glie-

*) Den Coefficienten 1 pflegt man nicht anzuschreiben, so daß a so viel bedeutet als 1a. Eben so läßt man das Vorzeichen + im Anfange eines Ausdruckes weg.

Digitized by Google

der haben, als vor der Addition, z. B. $8a - 9b + 3a - b + c - 2d + 9a$ ist gegenwärtig ein siebengliedriger Ausdruck, faßt man aber die gleichartigen Glieder zusammen, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} 8a - 9b + c - 2d \\ + 3a - b \\ + 9a \end{array}\right\} = 20a - 10b + c - 2d$$

welcher letztere Ausdruck nur viergliedrig ist.

Da mittels der Addition die mehrgliedrigen Ausdrücke auf eine gedrängtere Form gebracht werden können, so führt die Addition auch den Namen Reduktion, wenn es sich darum handelt, mehrgliedrige Größen-Ausdrücke in eine Summe zusammenzufassen.

§. 151.

Subtraktion mehrgliedriger Größen von mehrgliedrigen.

Um eine mehrgliedrige Buchstaben-Größe von einer mehrgliedrigen zu subtrahiren, stelle man den Subtrahend so unter den Minuend, das die gleichartigen Glieder unter einander stehen, verändere dann alle Vorzeichen des Subtrahends in die entgegengesetzten und verfahre dann nach den Regeln die für die Addition aufgestellt worden sind; es sey z. B. $8m - 3n + 7q$ der Minuend, und $-3m + 6n + q$ der Subrahend.

Minuend.	$8m - 3n + 7q$
Subtrahend.	$-3m + 6n + q$
Veränd. Zeich.	$+ \quad - \quad -$
Differenz:	$11m - 9n + 6q$

Sind nicht alle Glieder des Subtrahends gleichartig mit Gliedern des Minuends; so zeige man die Subtraktion durch Umwandlung der Vorzeichen des Subtrahends nur an. Ist z. B. $5c - 3x - 2y$ der Minuend, und

$5a + 7x + 3y - z$ der Subtrahend

so ist zu verfahren, wie hier angedeutet wird:

Digitized by Google

$$+5c-3x-2y$$
$$5a \quad +7x+3y-z$$
$$- \quad - \quad - \quad +$$

$$-5a+5c-10x-5y+z$$

So ist ferner:

$$(5m+3n-5p)-(8x+3y-2z)=$$
$$=5m+3n-5p-8x-3y+2x$$

Man kann sich zur leichterer Versinnlichung vorstellen, es käme für jedes Glied des Subtrahends ein gleichartiges im Minuend, aber mit dem Exponenten 0 vor z. B.

$$(3a+2b-3c)-(5d+2f-8g)=?$$
$$\text{Min.} \quad 3a+2b-3c+0d+0f+0g$$
$$\text{Subtr.} \quad 5d+2f-8g$$
$$- \quad - \quad +$$

$$\text{Rest:} \quad 3a+2b-3c-5d-2f+8g$$

Oder

$$(-m+2n+2x)-(-p+2q-z)=?$$

Man setze

$$\text{Min.} \quad -m+2n+2x+0p+0q+0z$$
$$\text{Subtr.} \quad -p+2q-z$$
$$+ \quad - \quad +$$

$$\text{Rest:} \quad -m+2n+2x+p-2q+z$$

wobei man leicht ersieht, daß $0z+z=(0+1)z=z$ u. so in and. Fällen.

§. 152.

Eine mehrgliedrige Größe mit einer eingliedrigen zu multipliziren.

Eine mehrgliedrige Größe wird mit einer eingliedrigen multiplizirt, wenn man jedes Glied des Multiplikands mit dem eingliedrigen Multiplikator multiplizirt, und die gewonnenen Theil-Produkte in ein Total-Produkt zusammenfaßt, nämlich:

$$(A+B+C+D+\ldots)\times m=$$
$$=A.m+B.m+C.m+D.m$$

Digitized by Google

Denn wenn man jeden Theil irgend eines Ganzen m-mal setzt, so wird hiedurch offenbar das Ganze ebenfalls m-mal gesetzt, oder mit m multiplizirt. Z. B. es soll die mehrgliedrige Größe $3a - 5b + 3c - d$ mit $-8m$ multiplizirt werden: man verfahre, wie folgt:

Multiplikand: $3a - 5b + 3c - d$
Multiplikator: $-8m$

Produkt: $-24am + 40bm - 24cm + 8dm$

Begreiflich hätte man auch, wie bei der Multiplikation einer mehrziffrigen Zahl mit einer einziffrigen zuerst das letzte Glied des Multiplikands mit m multipliziren können, übrigens ist es herkömmlich, mit dem Multipliziren links vom Multiplikand anzufangen. Ferner:

$-5(a+b)+3(c-d)-8(e-f)$ soll multiplizirt werden mit $7(e-x)$.

Man setze: $-5(a+b)+3(c-d)-8(e-f) \times 7(e-x)$

$-35(a+b).(e-x)+21(c-d).(e-x)-56(e-f)(e-x)$

indem hier $(a+b)$, $(c-d)$ wegen der Einschließungs-Zeichen nur als einzelne Buchstaben zu betrachten sind.

§. 153.

Eine mehrgliedrige Größe mit einer mehrgliedrigen zu multipliziren.

Wenn sowohl der Multiplikand als der Multiplikator mehrgliedrige Größen sind, so muß man den Multiplikand mit allen Gliedern des Multiplikators multipliziren. Man erhält hiedurch so viele Theil-Produkte, als der Multiplikator Glieder hat. Diese Theil-Produkte faßt man zuletzt durch Addition in ein Total-Produkt zusammen.

Wäre z. B. $(7+8+1)$ mit $(3+4)$ zu multipliziren, so hieße das doch offenbar: man soll den Multiplikand dreimal und viermal setzen.

Das dreimalige desselben ist $21 + 24 + 3$
Das viermalige . . . . $28 + 32 + 4$

Digitized by Google

Mithin erhält man das (dreimalige und viermalige), wenn man die Theil-Produkte 21 + 24 + 3 und 28 + 32 + 4 in die Summe 49 + 56 + 7 zusammenfaßt. Nämlich:

(7 + 8 + 1) × (3 + 4) = 49 + 56 + 7

was sich auch durch wirkliche Rechnung leicht bewährt.

Allgemein ausgedrückt stellt sich obige Vorschrift so dar:

(A + B + C + D) × (E + F) = (AE + BE + + CE + DE) + (AF + BF + CF + DF)

Beispiele:

1) (3a − 2b + 6c) × (3a − 8b) = ?

Rechnung.

3a − 2b + 6c
3a − 8b

9aa − 6ab + 18ac — indem man mit 3a multiplizirt
− 24ab + 16bb − 48bc — indem man mit − 8b multiplizirt

Produkt: 9aa − 30ab + 18ac + 16bb − 48bc

2) (3a − 2bc + x) × (a + 2bc − x) = ?

Rechnung.

3a − 2bc + x
a + 2bc − x

I 3aa − 2abc + ax
II + 6abc − 4bbcc + 2bcx
III − 3ax + 2bcx − xx

3aa + 4abc − 2ax − 4bbcc + 4bcx − xx

Hier wurde zuerst der ganze Multiplikand mit a multiplizirt, wodurch man das Produkt I erhielt.

Sodann multiplizirte man den ganzen Multiplikand mit 2bc, und es kam das Produkt II zum Vorschein.

Endlich wurde auch der ganze Multiplikant mit dem dritten und letzten Gliede des Multiplikators, nämlich mit − x multiplirt; das Produkt ist unter III verzeichnet.

Digitized by Google

Die gleichartigen Glieder sind unter einander geschrieben worden, so daß die Zusammenfassung der drei Theil-Produkte in das Haupt-Produkt keiner Schwierigkeit unterliegt.

3) $(a + x) \times (a - x) = ?$

Rechnung.

$$\begin{array}{r} a + x \\ \times\ a - x \\ \hline aa + ax \\ \quad - ax - xx \\ \hline aa + 0 + xx \text{ oder } aa - xx \end{array}$$

4) Es kann auch der Fall seyn, daß in den Theil-Produkten gar keine Glieder die gleichartig sind, vorkommen, wo dann natürlich nichts anderes übrig bleibt, als die einzelnen Glieder alphabetisch hinter einander zu setzen, z. B.

$(5a - 3b + 7c) \times (- 3x + 8z) = ?$

Rechnung.

$$\begin{array}{r} 5a - 5b + 7c \\ - 3x + 8z \\ \hline - 15ax + 9bx - 21cx \\ \qquad\qquad + 40az - 24bc + 5bcz \\ \hline - 15ax + 9bx - 21cx + 40az - 24bc + 5bcz \end{array}$$

§. 154.

Eine mehrgliedrige Größe durch eine eingliedrige zu dividiren.

Eine mehrgliedrige Größe durch eine eingliedrige zu dividiren, dividire man jedes Glied des Dividends durch den eingliedrigen Divisor z. B. $16 + 8 + 2$ soll dividirt werden durch 2. Man erhält

$$(16 + 8 + 2) : 2 = \frac{16}{2} + \frac{8}{2} + \frac{2}{2} = 8 + 4 + 1$$

Ferner:

$$(17 - 13 + 5) : 4 = \frac{17}{4} - \frac{13}{4} + \frac{5}{4}$$

Digitized by Google

Hier ist also die Division eines mehrgliedrigen Ausdrucks durch einen eingliedrigen zurückgeführt auf die Division eines eingliedrigen durch einen eingliedrigen. Wie diese letztere vollzogen werde, ist bereits im Allgemeinen gesagt worden. Da aber eingliedrige Größen sehr oft unter der Form von Brüchen auftreten, so wendet man hier die allgemeinen Gesetze an, die in der Lehre von den Brüchen bereits aufgestellt und begründet worden sind, wie folgende Beispiele zeigen.

1) $\frac{5\,ab}{c} : a = \frac{5\,b}{c}$ indem man den Zähler 5 ab durch a dividirte.

2) $\frac{3\,cx}{ey} : z = \frac{3\,cx}{eyz}$ wo der Nenner mit z multiplizirt wurde.

3) $\frac{8\,(m+n)}{9\,(e-f)} : (f-g) = \frac{8\,(m+n)}{9\,(e-f)\,(f-g)}$

Hier wurde der Nenner mit f — g multiplizirt und der Zähler darüber geschrieben.

4) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ wo nach dem Gesetz der Division eines Bruches durch einen andern übers Kreuz multiplizirt wurde.

Eben so ist

5) $\frac{3\,cx}{5\,ez} : \frac{8\,m}{9\,n} = \frac{27\,cnx}{40\,emz}$ wo ebenfalls der Zähler des Dividends mit dem Nenner des Divisors und der Nenner des Dividends mit dem Zähler des Divisors multiplizirt wurde, und so auch in ähnlichen Fällen.

Wie nun auch der mehrgliedrige Dividend gestaltet seyn mag, so werden wir im Stande seyn, die Division durch einen eingliedrigen Divisor zu vollziehen, wie aus folgenden Beispielen ersichtlich seyn wird.

1) $(3a + 15b + 27c) : 3 = a + 5b + 9c$

2) $7ab - 8cd + 16bc) : 4ad =$

$$= \frac{7ab}{4ad} - \frac{8cd}{4ad} + \frac{16bc}{4ad} =$$

$$= \frac{7b}{4d} - \frac{2c}{a} + \frac{4bc}{ad}$$

Digitized by Google

3) $\left(\frac{7a}{b} + \frac{8c}{d} - \frac{9e}{f}\right) : \frac{3x}{5y} = ?$

Rechnung.

$$\left(\frac{7a}{b} + \frac{8c}{d} - \frac{9e}{f}\right) : \frac{3x}{5y} = \left(\frac{7a}{b} : \frac{3x}{5y}\right) +$$
$$+ \left(\frac{8c}{d} : \frac{3x}{5y}\right) - \left(\frac{9e}{f} : \frac{3x}{5y}\right)^{*)} = \frac{35ay}{3bx} +$$
$$+ \frac{40cy}{3dx} - \frac{45ey}{3fx}$$

Hier waren Brüche durch Brüche zu dividiren. Wir zeigten zuerst die Division durch das gebräuchliche Zeichen (:) nur an, und führten sie dann wirklich aus.

4) $\left(\frac{8(a+b)}{3(c-d)x} - \frac{7(a+b)y}{9(c-d)}\right) : \frac{8(a+b)}{3(c-d)} = ?$

Rechnung.

$$\left(\frac{8(a+b)}{3(c-d)x} - \frac{7(a+b)y}{9(c-d)}\right) : \frac{8(a+b)}{3(c-d)} =$$
$$= \left(\frac{8(a+b)}{3(c-d)x} : \frac{8(a+b)}{3(c-d)}\right) - \left(\frac{7(a+b)y}{c(c-d)} : \frac{8(a+b)}{3(c-d)}\right) =$$
$$= \frac{1}{x} - \frac{21(a+b)\,(c-d)y}{8c(c-d).(a+b)} =$$
$$= \frac{1}{x} - \frac{21y}{8c}$$; denn im Zähler und Nenner des zweiten Theiles des Quotienten, kommen die Größen $a+b$, $c-d$ als Faktoren vor, die gegenseitig gestrichen werden können und so in andern Fällen.

§. 155.

Eine mehrgliedrige Größe durch eine mehrgliedrige zu dividiren.

Wenn gefordert wird, eine mehrgliedrige Größe durch eine mehrgliedrige zu dividiren, so wendet man ein Verfahren

*) Die Klammern hätten wohl hier wegbleiben können, tragen aber zur Deutlichkeit bei.

Digitized by Google

an, das dem bei der Division mehrziffriger Zahlen durch mehrziffrige dem Wesen nach sehr ähnlich ist.

Es sey z. B. die Zahl 1728 durch 12 zu dividiren. Offenbar ist $1728 = 1000 + 700 + 20 + 8$ und

$$12 = 10 + 2$$

Demnach soll die viergliedrige Größe $1000 + 700 + 20 + 8$ durch die zweigliedrige $10 + 2$ dividirt werden.

Die etwa anzuwendende Rechnung soll zuerst angeschrieben und hernach erläutert werden:

$$\begin{array}{rl|l} & 1000 + 700 + 20 + 8 & 10 + 2 \text{ Divisor} \\ \text{Divisor} & (10 + 2) & \underbrace{100 + 50 - 8 + 2}_{\text{Quotient}} \\ a & \underline{1000 + 200} & \\ \hline \text{1ter Rest} & 500 + 20 + 8 & \\ \text{Divisor} & (10 + 2) & \\ & \underline{500 + 100} & \\ \hline \text{2ter Rest} & - 80 + 8 & \\ \text{Divisor} & (10 + 2) & \\ & - 80 - 16 & \\ & + \quad + & \\ \hline \text{3ter Rest} & 24 & \\ \text{Divisor} & (10 + 2) & \\ & \underline{20 + 4} & \\ \hline \text{letzter Rest} & 4 - 4 = 0 & \end{array}$$

Das Verfahren, welches wir anwendeten, war folgendes:

1) Die Glieder des Dividends sowohl, als die des Divisors ordneten wir nach ihrem decadischen Werthe.

2) Nun stellten wir den Divisor so unter den Dividend, daß das erste Glied des Divisors unter das erste des Dividends zu stehen kam; und dividirten das erste Glied des Dividends durch das erste des Divisors, der Quotus 100 ist der erste Theil des gesuchten ganzen Quotus.

Digitized by Google

3) Nun multiplizirten wir den ganzen Divisor mit dem aufgefundenen ersten Theil des Quotus, (Produkt α) und subtrahirten das Produkt wirklich vom Dividend, indem wir die Zeichen des Produktes in die entgegengesetzten verwandelten und dann addirten. Nachdem also der Divisor 100mal aus dem Dividend weggenommen war, blieb vom Dividend noch der Rest: $500 + 20 + 8$.

4) Unter diesen stellten wir wieder den Divisor so, daß sein erstes Glied unter das erste Glied des Restes zu stehen kam, und verfuhren nun eben so, wie vorhin mit dem noch unangetasteten Dividend, bis endlich durch Fortsetzung dieser Rechnung der Dividend durch allmählige Wegnahme des Divisors ganz erschöpft war, und der Rest 4 — 4 oder 0 anzeigte, daß die Division vollendet sey. Der ganze Quotus ist $100 + 50 - 8 + 2$ d. i. 144 und wirklich ist

$$1728 : 12 = 144.$$

Ferner sey die Größe $aa - 2ab + bb$ zu dividiren durch $a - b$.

Rechnung.

1)	$aa - 2ab + bb$	$\mid a - b$
	$(a - b)$	
2)	$aa - ab$	
	$-\quad +$	
3)	$\ldots - ab + bb$	
4)	$\ldots\ldots (a - b)$	
5)	$\quad - ab + bb$	
	0	

1) aa wurde durch a dividirt. $\frac{aa}{a} = a$, welches der erste Theil des Quotus ist.

2) Mit diesem ersten Theile a wurde der ganze Divisor multiplizirt, wodurch das Produkt $aa - ab$ zum Vorschein kam.

3) Dieses Produkt wurde vom ganzen Dividend subtrahirt; es blieb als Rest: $- ab + bb$.

Digitized by Google

4) Unter dieſen Reſt wurde wieder der Diviſor geſtellt; und das erſte Glied des Reſtes durch das erſte Glied des Diviſors dividirt. Der Quotus iſt — b, welches der zweite Theil des geſuchten ganzen Quotus iſt.

5) Mit dieſem zweiten Theil des Quotus multiplizirte man wieder den ganzen Diviſor, ſetzte das Produkt unter den erſten Reſt, und ſubtrahirte, ſo ergab ſich der zweite Reſt, der hier 0 iſt. Oder

54 aabb — 27 abcd — 6 abx + 3 ccdd + 2 cdx ſoll dividirt werden durch 18 ab — 3 cd — 2 x

Rechnung.

54 aabb — 27 abcd — 6 abx + 3 ccdd + 2 cdx | 18 ab — 3 cd — 2x
(18 ab — 3 cd — 2 x) | 3 ab — cd
54 aabb — 9 abcd — 6 abx
— + +

— 18 abcd + 3 ccdd + 2 cdx
(18 ab — 3 cd — 2 x)
— 18 abcd + 3 ccdd + 2 cdx
+ — —

0

Das Verfahren war hier ganz das nämliche, wie bei der vorigen Aufgabe. Es gründet ſich immer auf eine wiederholte Wegnahme des Diviſors aus dem Dividend, die ſo lange fortgeſetzt wird, bis vom Dividend gar nichts mehr übrig iſt; wie bei der Diviſion von Zahlen durch Zahlen.

Nicht immer kann die Diviſion bis auf den Reſt 0 fortgeſetzt werden, eben ſo wie bei der Diviſion mit Zahlen; da man aber jedenfalls immer wieder das erſte Glied des Reſtes durch das erſte Glied des Diviſors dividiren kann, ſo läßt ſich der Quotus fortſetzen, ſo weit man will. Z. B. a ſoll dividirt werden durch a + b

Digitized by Google

Rechnung.

a	Quotus.
(a + b)	$1 + \frac{b}{a} - \frac{bb}{aa} \ldots$
a + b	

$+ b$

1) $(a + b)$

$+ b + \frac{bb}{a}$

2) $- - \frac{a}{a}$

$- \frac{bb}{a}$

3) . . . . $(a + b)$

$\frac{bb}{a} + \frac{bbb}{aa}$

$+ \quad - \frac{bbb}{aa}$ u. s. f.

1) Unter den ersten Rest b wurde der Divisor a + b gesetzt; das erste Glied des Restes ist b, das erste des Divisors ist a; da die Division nicht wirklich vollzogen werden kann, so wird sie nur angedeutet, und der entsprechende Quotient ist also $\frac{b}{a}$

2) Mit diesem Quotienten $\frac{b}{a}$ wurde der ganze Divisor a + b multiplizirt. Man erhielt $(a + b) \times \frac{b}{a} =$ $= \frac{ab}{a} + \frac{bb}{a} = b + \frac{bb}{a}$ welches Produkt man vom Reste b subtrahirte und den neuen Rest $- \frac{bb}{a}$ erhielt.

3) Nun wurde wieder der Divisor a+b herabgestellt und der Rest $-\frac{bb}{a}$ durch a dividirt. — $\frac{bb}{a}$ ist ein Bruch. Um ihn durch a zu dividiren, muß man seinen Nenner mit a multipliziren und erhält als Quotus $- \frac{bb}{aa}$ u. s. f.

Digitized by Google

III. Abschnitt.

Von den Potenzen.

§. 156.

Potenz. Stammgröße. Exponent. Gleichartige, ungleichartige Potenzen.

Ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren nennt man eine Potenz, oder Würde oder Dignität (potentia Macht — dignitas Würde).

So ist z. B. 25 eine Potenz; denn $25 = 5 . 5$.

1728 ist eine Potenz, denn $12 . 12 . 12 = 1728$

Jener Faktor, welcher in einer Potenz öfter als solcher vorkommt, führt den Namen Stammgröße oder Wurzel der Potenz.

Wenn z. B. $125 = 5 . 5 . 5$ so ist 5 die Stammgröße der Potenz 125 und 125 heißt eine Potenz von 5.

Die Größe, welche anzeigt, wie oft eine Stammgröße in der Potenz als Faktor auftritt, nennt man den Exponenten der Potenz.

Wenn z. B. $3 . 3 . 3 . 3 = 81$, so ist 4 der Exponent der Potenz 81, weil die Größe 3 viermal als Faktor gesetzt werden muß, damit die Potenz 81 erzeugt werde.

Wenn ferner $a^n = p$, so ist n der Exponent, der Potenz p.

Durch den Exponenten wird der Grad der Potenz bestimmt. Wenn zwei gleiche Faktoren in der Potenz vorkommen, so nennt man letztere die zweite Potenz oder das Quadrat der Stammgröße:

Digitized by Google

z. B. 25 ist die zweite Potenz oder das Quadrat von 5, weil $5 . 5 = 25$ die dritte Potenz führt auch den Namen Kubus (Würfel); so ist 27 der Kubus von 3, weil $3 . 3 . 3 = 27$

8 der Kubus von 2, weil $2 . 2 . 2 = 8$.

Allgemein, wenn die Stammgröße a in einer Potenz n mal als Faktor auftritt, so nennt man letztere die nte Potenz von a oder $a^n = (a . a . a \ldots\ldots$ n mal als Faktor)

Potenzen heißen gleichartig, wenn sie sich durch nichts unterscheiden, als durch ihre Coefficienten.

$3a^5$, $-\frac{7}{3}a^5$, a^5 sind gleichartige Potenzen.

Dagegen sind die Potenzen $3a^5$, 76^5, $-3a^3$ ungleichartige Potenzen.

§. 157.

Addition und Subtraktion von Potenzen.

Die Addition gleichartiger Potenzen unterliegt keinen besondern Regeln. Man addirt nämlich nach den Regeln der allgemeinen Addition bei gleichartigen Potenzen die Coefficienten und schreibt hinter die Summe die den Summanden gemeinschaftliche Stammgröße mit dem gemeinschaftlichen Exponenten. Die Summanden seyen z. B.

$$-3a^7, +7a^7, +19a^7, -4a^7$$

Man erhält durch Addition

$$\left.\begin{matrix} -3 \\ +7 \\ +19 \\ -4 \end{matrix}\right\} a^7 \text{ oder } +19a^7$$

Sind die zu addirenden Potenzen ungleichartig, so kann man die Addition nur anzeigen z. B. die Potenzen: $-3a^2$, $+7b^3$, $-8c^5$ seyen zu addiren, man erhält als Summe nichts weiter, als $-3a^2 + 7b^3 - 8c^5$

Digitized by Google

Bei der Subtraktion gleichartiger und ungleichartiger Potenzen wird auf ganz ähnliche Weise verfahren, nämlich:

$$(8a^3) - (4a^3) = (8-4)\,a^3 = 4a^3$$

$$(-7b^5) - (-8b^5) = (-7+8)\,b^5 = b^5$$

Nämlich: $-7b^5$

$-8b^5$

$+$

$+b^5$

Dagegen $(-3m^4) - (-8n^7) = -3m^4 + 8n^7$

indem man blos das Zeichen des Subtrahends $-8n^7$ in das entgegengesetzte verwandelte.

§. 158.

Multiplikation von Potenzen.

Sollte die Potenz a^3 mit der Potenz a^5 multiplizirt werden, so kann es uns nicht schwer fallen, das richtige Verfahren auszumitteln, es ist nämlich:

$a^3 = aaa$

$a^5 = aaaaa$

———————————— *)

Mith. $a^3 \times a^5 = aaa \,.\, aaaaa$

Da in diesem Produkte der Faktor a (3mal und 5mal) d. i. 8mal vorkommt, so setzt man kürzer: $a^3 \times a^5 = a^8$

Ist überhaupt der Multiplikand a^m, der Multiplikator a^n so kommt im ersteren die Stammgröße m-mal, im zweiten n-mal vor. Da nun im Produkt alle diese a als Faktoren an einander gereiht werden müssen, so kommt a im Produkte m + n mal als Faktor vor, nämlich:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$ Oder:

*) Ein wagrechter Strich drückt hier das Wörtchen „mithin" oder „folglich" aus.

Um Potenzen gleicher Stammgröße mit einander zu multipliziren, setze man die gemeinschaftliche Stammgröße nur einmal und gebe ihr einen Exponenten, welcher eine Summe der Exponenten der Faktoren ist.

Vorkommende Coefficienten multiplizire man mit einander, nämlich:

$$3a^{5} \times 4a^{8} = 12a^{13}$$

Oder:

$$2m^{2} \times 5m^{3} \times 7m^{6} = 70m^{11}$$

und so in andern Fällen.

Sind die Faktoren von ungleichen Stammgrößen, so multiplizire man die Coefficienten, und setze hinter das Produkt die Stammgrößen mit ihren Exponenten in alphabetischer unmittelbarer Abfolge, z. B.

$$3a^{5} \times 7b^{8} = 21a^{5}b^{8}$$

oder:

$$7a^{3} \times 2b^{5} \times 3c^{7} = 7.2.3a^{3}b^{5}c^{7} = 42a^{3}b^{5}c^{7}$$

§. 159.

Potenzen durch einander zu dividiren.

Um Potenzen von gleichen Stammgrößen durch einander zu dividiren, setze man die gemeinschaftliche Stammgröße nur einmal, und gebe ihr einen Exponenten, welcher eine Differenz zwischen dem Exponenten des Dividends und Divisors ist. Nämlich:

$$a^{5} : a^{3} = a^{5-3} = a^{2}$$

Der Grund ist einleuchtend; denn es ist

$$a^{5} = aaaaa$$

und

$$a^{3} = aaa$$

also

$$a^{5} : a^{3} = \frac{aaaaa}{aaa} = a^{2}$$

indem eben so viele a als Faktoren im Dividend streichen, als im Divisor vorkommen.

Digitized by Google

Allgemein ist $a^m : a^n = a^{m-n}$

Treten die Potenzen im Dividend und Divisor mit Coefficienten auf, so unterliegen diese ohnehin den für Buchstaben-Größen bereits aufgestellten und begründeten Regeln, nämlich:

$$25a^7 : 5a^3 = 5a^4$$

$$36(a+b)^8 : 12(a+b)^2 = 3(a+b)^6$$

$$7m^9 : 3m^4 = \frac{7}{3}m^5$$

und so in ähnlichen Fällen.

Haben die Potenzen ungleiche Stammgrößen, so läßt sich die Division nur andeuten: z. B.

$$8a^3 : 7b^5 = \frac{8a^3}{7b^5}$$

$$35m^8 : 5n^9 = \frac{7m^8}{n^9}$$

u. s. w.

§. 160.

Bedeutung des Exponenten: 0

Es ist möglich, daß man durch die Division einer Potenz durch eine andere einen Exponenten 0 erhalte; dieß geschieht, wenn beide Potenzen gleiche Stammgrößen und gleiche Exponenten haben. Offenbar ist

$$a^4 : a^4 = a^{4-4} = a^0$$

Statt 4 hätte man auch jede andere Zahl setzen können.

Da aber auch $a^4 : a^4 = 1$ weil jede Größe 1mal in sich selbst enthalten ist, so kann man $a^4 : a^4$ auf zweierlei Art ausdrücken, entweder durch a^0 oder durch 1; die Ausdrücke a^0 und 1 sind demnach ganz gleichgeltend, und man kann immer einen statt des andern setzen, nämlich:

$$a^0 = 1$$

eben so $b^0 = 1$, $c^0 = 1$

$7a^0 = 7$ u. s. f.

Digitized by Google

Die Wahrheit des Gesagten erhellt auch auf folgende Art:

$7a^1$ bedeutet, daß hinter dem 7 die Größe a einmal, $7a^3$, daß sie 3mal und a^0, daß sie 0mal, d. i. gar nicht als Faktor auftreten soll, nämlich:

$7a^0 = 7$ und $1a^0 = 1$ oder $a^0 = 1$

§. 161.

Potenzen mit negativen Exponenten.

Auch negative Exponenten können durch Division zum Vorschein kommen, dieß geschieht, wenn die Stammgrößen gleich sind, und der Exponent des Divisors größer ist, als der des Dividends. So wie nämlich $a^7 : a^3 = a^{7-3}$, so ist auch $a^5 : a^8 = a^{5-8}$ d. i. a^{-3}

Die nämliche Division $\frac{a^5}{a^8}$ gibt aber auch den Quotienten $\frac{1}{a^3}$ denn $a^5 : a^8 = \frac{aaaaa}{aaaaaaaa} = \frac{1}{aaa} = \frac{1}{a^3}$.

indem sich aaaaa oben und unten streichen. Es ist also gleichgültig, ob man setzt

$$a^5 : a^8 = a^{5-8} = a^{-3}$$

oder: $$a^5 : a^8 = \frac{1}{a^3}$$

Die Ausdrücke a^{-3} und $\frac{1}{a^3}$ kann man demnach einen für den andern setzen; nämlich: $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$

Allgemein $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

So auch $5^{-3} = \frac{5}{a^3}$ u. s. f.

In Worten:

Jede Potenz mit negativem Exponente ist gleich einem Bruche, dessen Zähler 1 und dessen Nenner die nämliche Potenz, jedoch mit positivem Exponenten ist.

Digitized by Google

Dieſe Wahrheit läßt ſich auch aus der Natur von Potenz und Exponenten erkennen; nämlich a^{-3} bezeichnet, daß a dreimal als das Entgegengeſetzte von Faktor auftreten ſolle. Da nun das Entgegengeſetzte von Faktor nicht anders ſeyn kann, als „Diviſor", ſo bedeutet a^{-3} daß a dreimal als Diviſor auftreten ſoll, nämlich:

$$1\,a^{-3} = \frac{1}{a^3} \text{ oder } a^{-3} = \frac{1}{a^3}$$

§. 162.

Wegſchaffung negativer Exponenten.

Hiedurch wird es leicht, eine Potenz mit negativen Exponenten, die in einem algebraiſchen Ausdrucke vorkommt, in eine andere mit poſitivem Exponenten zu verwandeln, demnach jedenfalls negative Exponenten fortzuſchaffen, z. B.

$$\frac{3(a+b)c^{-5}}{e} = \frac{3(a+b)}{e} \cdot c^{-5} = \frac{3(a+b)}{e} \cdot \frac{1}{e^5}$$

$$= \frac{(3a+b)}{c^5\,e}$$

ſo auch:

$$\frac{8mn}{pq^{-3}} = \frac{8mn}{p} \cdot \frac{1}{q^{-3}} = \frac{8mn}{p} \times \left(1 : q^{-3}\right)$$

$$= \frac{8mn}{p} \times \left(1 : \frac{1}{q^3}\right) = \frac{8mn}{p} \times \frac{q^3}{1} = \frac{8mnq^3}{p}$$

So iſt ferner:

$$\frac{a^{-3}}{b^{-5}} = a^{-3} : b^{-5} = \frac{1}{a^3} : \frac{1}{b^5} = \frac{b^5}{a^3}$$

woraus erſichtlich iſt, daß man eine Potenz mit negativem Exponenten aus dem Zähler eines Bruches in den Nenner und aus dem Nenner in den Zähler bringen kann, wenn man nur das Vorzeichen in das entgegengeſetzte verwandelt.

§. 163.

Ein Produkt zu potenziren.

Um ein Produkt in eine verlangte Potenz zu erheben, erhebe man die Faktoren in die verlangte Potenz, nämlich:

Digitized by Google

$$(ab)^3 = a^3 \cdot b^3$$

oder: $(abc)^5 = a^5 \cdot b^5 \cdot c^5$

Der Grund des Verfahrens ergibt sich aus folgender Darstellung:

$(ab)^3 = ab \times ab \times ab = aaa.bbb = a^3 \cdot b^3$

Allgemein: $(abc)^n = a^n\ b^n\ c^n$

§. 164.

Einen Bruch zu potenziren.

Ein Bruch wird potenzirt, indem man Zähler und Nenner in die verlangte Potenz erhebt, und diese Potenzen in Bruchform anschreibt, nämlich:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$$

Allgemein: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

denn $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{aaa}{bbb} = \frac{a^3}{b^3}$

§. 165.

Eine Potenz zu potenziren.

Sollte die bereits gebildete Potenz a^3 wieder in eine Potenz erhoben werden, z. B. in die 4te, so wäre sicherlich $(a^3)^4 = a^3 \times a^3 \times a^3 \times a^3$ nach der Begriffserklärung von Potenzen.

Es ist aber $a^3 \times a^3 \times a^3 \times a^3 = a^{3+3+3+3} =$

$= a^{4.3}$ demnach $(a^3)^4 = a^{4.3} = a^{12}$

Oder allgemein: $(a^m)^n = a^{mn}$

Daher die Vorschrift: Um eine Potenz zu potenziren, setze man rechts oder die Stammgröße einen Exponenten, welcher ein Produkt ist aus dem Exponenten der gegebenen Potenz in den Exponenten der geforderten.

Digitized by Google

IV. Abschnitt.

Von den Wurzel-Größen.

§. 166.

Was es heißt, eine Wurzel ausziehen — Wurzel-Exponent.

Aus irgend einer Größe A die 3te, 4te, 5te Wurzel ziehen, heißt diese Größe in 3, 4 oder 5 gleiche Faktoren zerlegen und einen davon setzen. Es sey z. B. aus 16 die vierte Wurzel zu ziehen:

Es ist $16 = 2 . 2 . 2 . 2$

Demnach 2 die 4te Wurzel von 16.
Eben so ist 5 die 3te Wurzel von 125, denn $5 . 5 . 5 = 125$
7 ist die 2te Wurzel von 49 da $7 . 7 = 49$ u. s. f.

Die Zahl, welche anzeigt, die wievielte Wurzel aus einer Größe gezogen werden soll, heißt Wurzel-Exponent.

Das Zeichen für die Operation des Wurzel-Ausziehens ist $\surd$, in dessen Oeffnung der Wurzel-Exponent, und neben welches die Größe gesetzt wird, aus welcher eine Wurzel gezogen werden soll.

So bezeichnet z. B. $\sqrt[3]{125}$, daß aus 125 die dritte Wurzel; $\sqrt[n]{A}$ daß aus A die n Wurzel gezogen werden soll.

Der Exponent bestimmt auch den Grad der Wurzel; so ist $\sqrt[5]{A}$ eine Wurzel 5ten Grades. Eine Wurzel 2ten Grades pflegt man auch Quadrat-Wurzel, eine Wurzel dritten Grades Kubik-Wurzel zu nennen.

Den Exponenten 2 schreibt man Kürze halber gar nicht in das Wurzel-Zeichen. So sind die Ausdrücke $\surd 64$ u. $\sqrt[2]{64}$ gleichgeltend.

Digitized by Google

§. 167.

Es ist nicht möglich, alle Größen in lauter gleiche Faktoren zu zerlegen. So kann man wohl 81 in zwei gleiche Faktoren zerlegen, denn $9 \cdot 9 = 81$.

Hingegen ist die Zerfällung der Zahl 21 in zwei gleiche Faktoren streng genommen nicht thunlich. — Wohl ist beinahe $21 = 4,57 \times 4,57$ aber $4,57 \times 4,57$ gibt doch nicht genau 21, sondern nur 20,88 und etwas darüber.

Aus solchen Größen, die sich nicht vollständig in zwei oder mehrere gleiche Faktoren zerlegen lassen, kann man demnach auch die entsprechende Wurzel nicht genau angeben, daher eine solche nur näherungsweise bestimmbare Wurzeln Irrational-Wurzeln heißen.

Ausdrücke, in welchen Wurzel-Zeichen vorkommen, nennt man Wurzelgrößen oder Radical-Größen.

§. 168.

Probe über richtiges Ausziehen der Wurzeln.

Wenn $\sqrt[3]{8} = 2$ so heißt das: wenn man 8 in 3 gleiche Faktoren zerlegt, und einen davon setzt, so ist dieser 2.

Diese Behauptung ist nur dann wahr, wenn $2.2.2 = 8$ oder $2^3 = 8$ ist.

Wenn man nämlich die gefundene Wurzel zur Potenz des Wurzel-Exponenten erhebt, so muß man die Größe, aus welcher die Wurzel gezogen wurde, d. i. die Größe unter dem Wurzel-Zeichen wieder erhalten.

So wenn $\sqrt{25} = 5$ so muß $5^2 = 25$

Wenn $\sqrt[3]{27} = 3$ so muß $3^3 = 27$.

Wenn $\sqrt[4]{32} = 2$ so muß $2^4 = 32$.

Allgemein, wenn

$$\sqrt[n]{A} = b \text{ so muß}$$
$$b^n = A \text{ seyn.}$$

Digitized by Google

§. 169.

Wurzelgrößen als Potenzen auszudrücken.

Sollte aus a^3 die 4te Wurzel gezogen d. i. der Werth von $\sqrt[4]{a^3}$ bestimmt werden, so könnte man als 4te Wurzel von a^3 eine Potenz von a angeben, nämlich a mit dem Exponenten $\frac{3}{4}$ d. i. $a^{\frac{3}{4}}$. Denn $a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}} = a^{4\cdot\frac{3}{4}} = a^3$

Demnach

$\sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}}$ denn wenn man $a^{\frac{3}{4}}$ viermal als Faktor setzt oder in die 4te Potenz erhebt, so erhält man wirklich die Größe unter dem Wurzel-Zeichen, nämlich: a^3

Eben so ist $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ denn $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a$

Ferner $\sqrt[7]{b^3} = b^{\frac{3}{7}}$ denn $\left(b^{\frac{3}{7}}\right)^7 = b^{\frac{3}{7}\cdot 7} = b^3$

Allgemein $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ denn es ist

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n}\cdot n} = a^{\frac{mn}{n}} = a^m,$$

wie das auch wirklich statt finden muß, wenn $a^{\frac{m}{n}}$ die richtige nte Wurzel von a^m seyn soll.

Man ersieht, daß es sich hier um nichts, als um eine Form handelt, doch ist es bequem, eine Wurzel-Größe als eine Potenz ausdrücken zu können, weil uns die Rechnung mit Potenzen bereits bekannt ist.

Nämlich jede Wurzel-Größe läßt sich ausdrücken als Potenz mit einem gebrochenen Exponenten, dessen Zähler der Exponent der Größe unter dem Wurzel-Zeichen und dessen Nenner der Wurzel-Exponent selbst ist.

Digitized by Google

Diese Verwandlung von Wurzel-Größen in Potenzen gewährt den Vortheil, daß man alle Rechnungs-Operationen mit Wurzel-Größen vornehmen kann, sobald man nur die Lehre von den Potenzen inne hat.

§. 169.

Gleichartige — ungleichartige Wurzel-Größen. Gleichnamige — ungleichnamige Wurzel-Größen.

Man sagt: Wurzel-Größen sind gleichartig, wenn sie sich durch nichts unterscheiden, als durch ihre Coefficienten, oder wenn sowohl die Wurzel-Exponenten, als auch die Größen unter den Wurzel-Zeichen einander gleich sind. Z. B. $3\sqrt[3]{a^8}$, $-8\sqrt[3]{a^8}$, $m\sqrt[3]{a^8}$ sind gleichartige Wurzel-Größen.

Im entgegengesetzten Falle nennt man Wurzel-Größen ungleichartig, z. B. $7\sqrt[3]{a^2}$, $8\sqrt[5]{a^2}$, $-5\sqrt[m]{b^n}$ sind drei ungleichartige Wurzel-Größen.

Wurzel-Größen heißen gleichnamig, wenn sie gleiche Wurzel-Exponenten haben, z. B. $7\sqrt[3]{m}$, $8\sqrt[3]{n}$, $\sqrt[3]{p}$ sind gleichnamig.

§. 170.

Addition und Subtraktion von Wurzel-Größen.

Die Addition und Subtraktion von Wurzel-Größen unterliegt den nämlichen Gesetzen, wie die Addition und Subtraktion von Buchstaben-Größen im Allgemeinen, wie aus folgenden Beispielen ersichtlich ist:

$$30\sqrt[3]{a^2} + 5\sqrt[3]{a^2} - 7\sqrt[3]{a^2} = (30 + 5 - 7)\sqrt[3]{a^2} =$$
$$= 28\sqrt[3]{a^2}$$

Ferner:

$$8\sqrt[5]{b^3} - (-3\sqrt[5]{b^3}) = (8 + 3)\sqrt[5]{b^3} = 11\sqrt[5]{b^3}$$

Sind die Wurzel-Größen ungleichartig, so können die Operationen der Addition und Subtraktion nur angedeutet werden.

Digitized by Google

§. 171.

Ungleichnamige Wurzel-Größen unter gleiche Benennung zu bringen.

Um Wurzel-Größen, welche ungleiche Wurzel-Exponenten haben, gleichnamig zu machen, verwandle man sie in Potenzen mit gebrochenen Exponenten; bringe diese Brüche unter gleiche Benennung, und verwandle diese Potenzen wieder in Wurzel-Größen, indem man die Nenner der Brüche in die Wurzel-Zeichen setzt, die Zähler aber den Größen unter den Wurzel-Zeichen als Exponenten beigibt. Es sollen z. B. die Wurzel-Größen:

$$\sqrt[3]{a^2} \qquad \sqrt[5]{b^3} \qquad \sqrt[7]{c^8}$$

auf gleiche Benennung gebracht werden. Man setze dafür

$$a^{\frac{2}{3}} \qquad b^{\frac{3}{5}} \qquad c^{\frac{8}{7}}$$

und indem man die drei gebrochenen Exponenten unter gleiche Benennung bringt:

$$a^{\frac{70}{105}} \qquad b^{\frac{63}{105}} \qquad c^{\frac{120}{105}}$$

Verwandelt man diese Potenzen wieder in Wurzel-Größen, so erhält man:

$$\sqrt[105]{a^{70}} \qquad \sqrt[105]{b^{63}} \qquad \sqrt[105]{c^{120}}$$

Oder allgemein:

$$\sqrt[m]{a^n} \qquad \sqrt[p]{b^q} \qquad \sqrt[r]{c^t}$$

$$a^{\frac{n}{m}} \qquad b^{\frac{q}{p}} \qquad c^{\frac{t}{r}}$$

$$a^{\frac{npr}{mpr}} \qquad b^{\frac{qmr}{mpr}} \qquad c^{\frac{mpt}{mpr}}$$

$$\sqrt[mpr]{a^{npr}} \qquad \sqrt[mpr]{b^{qmr}} \qquad \sqrt[mpr]{b^{qmr}}$$

Hieraus fließt nun folgende allgemeine Vorschrift:

Digitized by Google

Um Wurzel-Größen unter gleiche Benennung zu bringen, multiplizire man der Reihe nach jeden Exponenten der Größe unter dem Wurzel-Zeichen mit allen Wurzel-Exponenten, nur nicht mit dem seinigen, so erhält man die neuen Exponenten der Größen unter den Wurzel-Zeichen. Den gemeinschaftlichen Wurzel-Exponenten erhält man, wenn man alle Wurzel-Exponenten mit einander multiplizirt. Beispiele:

$$3\sqrt[3]{m^4} \text{ , } * 8\sqrt{n^5} \text{ , } 5\sqrt[4]{x^7}$$

Hiefür:

$$3\sqrt[3.2.4]{m^{4.2.4}} \text{ , } 8\sqrt[3.2.4]{n^{5.3.4}} \text{ , } 5\sqrt[3.2.4]{x^{7.3.2}}$$

Oder:

$$3\sqrt[24]{m^{32}} \qquad \sqrt[24]{n^{60}} \qquad \sqrt[24]{x^{42}}$$

Ferner:

$$\sqrt[x]{b^3} \text{ , } \sqrt[y]{c^4} \text{ , } \sqrt[z]{d^5}$$

$$\sqrt[xyz]{b^{3yz}} \text{ , } \sqrt[xyz]{c^{4xz}} \text{ , } \sqrt[xyz]{d^{5xy}}$$

und so in andern Fällen.

§. 172.

Multiplikation von Wurzel-Größen.

Die Multiplikation zweier Wurzel-Größen kann man entweder nur andeuten, nachdem man die Coefficienten mit einander multiplizirt hat, z. B.

$$3\sqrt[3]{a^2} \times 5\sqrt[5]{b^3} \times 3\sqrt{c} =$$

$$= 3 \cdot 5 \cdot 3\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[5]{b^3} \cdot \sqrt{c} =$$

$$= 45\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[5]{b^3} \cdot \sqrt{c}$$

oder man bringe zuvor die Faktoren unter gleiche Benennung, setze dann hinter das Produkt der Coefficienten das Wurzel-Zeichen mit dem gemeinschaftlichen Wurzel-Exponenten nur einmal, und unter dasselbe ein Produkt aus den Größen unter den Wurzel-Zeichen der Faktoren, z. B.

$$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$$

*) Das Fehlen des Exponenten im Wurzel-Zeichen bedeutet den Exponenten 2.

Digitized by Google

Der Grund, aus welchem wir in dieſem Falle eine ſolche Abkürzung anwenden dürfen, erhellet leicht aus Folgendem:

$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} = (ab)^{\frac{1}{3}}$; denn man potenzirt ein ganzes Produkt, wenn man jeden Faktor in die verlangte Potenz erhebt.

Statt $(ab)^{\frac{1}{3}}$ ſetze man nun $\sqrt[3]{ab}$ ſo hat man

$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$.

Da man Wurzel-Größen immer gleiche Benennung verſchaffen kann, ſo läßt ſich dieſes Verfahren auch immer anwenden. Beiſpiele:

$$3\sqrt[3]{a} \times 7\sqrt[4]{b^3} \times \sqrt[4]{c} = 3\sqrt[24]{a^8} \times 7\sqrt[24]{b^{36}} \times \sqrt[24]{c^6} =$$
$$= 21\sqrt[24]{(a^8\, b^{36}\, c^6)}$$

Ferner:

$$*) \quad 5\sqrt[4]{b^3} \times 8\sqrt[3]{(a^2\, c^5)} = 5\sqrt[12]{b^9} \times$$
$$= 8\sqrt[12]{(a^8\, c^{20})} = \sqrt[12]{(a^8\, b^9\, c^{29})}$$

und ſo in andern Fällen.

§. 174.

Wurzel-Größen durch einander zu dividiren.

Sehr ähnlich iſt das Verfahren bei der Diviſion einer Wurzel-Größe durch eine andere;

---

*) Um dieſe beiden Wurzel-Größen auf gleiche Benennung zu bringen, hat man eigentlich zu ſetzen:

$5\sqrt[4]{b^3} \times 8\sqrt[3]{(a^2\, c^5)} = 5\sqrt[4]{b^3} \times 3\sqrt[4]{(a^2\, c^5)^1} =$
$= 5\sqrt[4.3]{b^{3.3}} \times 8\sqrt[4.3]{(a^2\, c^5)} = 5\sqrt[4.3]{b} \times 8\sqrt[4.3]{(a^2\, c^5)^4}$

Da nun Produkte potenzirt werden, wenn man jeden Faktor in die verlangte Potenz erhebt, ſo iſt $(a^2\, c^5)^4 = (a^2)^4 \cdot (c^5)^4$ und wieder nach der für die Potenzirung von Potenzen gegebenen Vorſchrift iſt $(a^2)^4 = a^8$ und $(c^5)^4 = c^{20}$, daher nun $(a^2)^4 \cdot (c^5)^4 = a^8\, c^{20}$.

Digitized by Google

Man bringt nämlich, wenn solches nöthig, die Wurzel-Größen auf gleiche Benennung, setzt das Wurzel-Zeichen mit dem gemeinschaftlichen Wurzel-Exponenten nur einmal, und unter dasselbe einen Quotienten zwischen der Größe unter dem Wurzel-Zeichen im Dividend und Divisor. Die Coefficienten werden behandelt, wie überhaupt in der Division von Buchstaben-Größen geschehen muß.

$$\text{Z. B. } 8\sqrt[5]{a} : 3\sqrt[5]{b} = \frac{8}{-}\sqrt[5]{\frac{a}{b}}$$

denn $8\sqrt[5]{a} : 3\sqrt[5]{b} = 8a^{\frac{1}{5}} : 3b^{\frac{1}{5}} = \frac{8}{3}\frac{a^{\frac{1}{5}}}{b^{\frac{1}{5}}} = \frac{8}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{5}}$

nach dem Satze in der Potenzen-Lehre $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ Für $\frac{8}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{5}}$ kann man aber setzen $\frac{8}{3}\sqrt[5]{\frac{a}{b}}$ daher wirklich $8\sqrt{a} : 3\sqrt[5]{b} = \frac{8}{3}\sqrt[5]{\frac{a}{b}}$.

Fernere Beispiele;

1) $25\sqrt{a^3} : 5\sqrt[3]{b} = 25\sqrt[6]{a^9} : 5\sqrt[6]{b^2} = \frac{25}{5}\sqrt[6]{\frac{a^9}{b^2}} = 5\sqrt[6]{\frac{a^9}{b^2}}$

2) $16\sqrt{(ab^2)} : 2\sqrt[3]{(a^4 b^7)} = 16\sqrt[6]{(a^3 b^6)} : 2\sqrt[6]{(a^8 b^{14})} = 8\sqrt[6]{\left(\frac{a^3 b^6}{a^8 b^{14}}\right)} = 8\sqrt[6]{\left(\frac{1}{a^4 b}\right)}$

§. 175.

Aus einem Produkte eine Wurzel zu ziehen.

So wie ein Produkt potenzirt wurde, indem man jeden Faktor in die verlangte Potenz erhob, so wird aus einem Produkte eine Wurzel von verlangtem Grade gezogen, wenn man die Wurzel dieses Grades aus jedem Faktor zieht, und diese Wurzeln mit einander multiplizirt.

Z. B. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

Digitized by Google

Die Wahrheit des Gesagten folgt unmittelbar aus einem vorigen §. nach welchem

$$\sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{ab} \text{ mithin auch umgekehrt}$$

$$\sqrt[4]{ab} = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{b}$$

Allgemein: $\sqrt[n]{A.B} = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B}$

So auch $\sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{c}$

Oder: $8\sqrt{a^2 b^4 c^5} = 8\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^4} \cdot \sqrt{c^5} =$

$= 8\, a^{\frac{2}{2}} \cdot b^{\frac{4}{2}} \cdot \sqrt{c^5} = 8\, ab^2 \sqrt{c^5}$

§. 176.

Aus einem Bruche eine Wurzel zu ziehen.

Aus einem Bruche zieht man eine Wurzel von bestimmtem Grade, wenn man sie aus Zähler und Nenner zieht, und diese Wurzeln in Bruchform anschreibt, nämlich:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \text{ indem nach einem der vorigen §§.}$$

$\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{(a : b)}$ oder was dasselbe ist.

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

§. 177.

Wurzel-Größen zu potenziren.

Die Aufgabe, eine Wurzel-Größe in irgend eine Potenz zu erheben, ist gleich bedeutend mit der Aufgabe, Wurzel-Größen mit einander zu multipliziren. — Man läßt nämlich den Wurzel-Exponenten unverändert, und potenzirt die Größe unter dem Wurzel-Zeichen so wie auch den Coefficienten der Wurzel-Größe. Z. B. $3\sqrt[4]{a}$ wäre in die 2te Potenz zu erheben, so ist $(3\sqrt[4]{a})^2 = 3\sqrt[4]{a} \times 3\sqrt[4]{a} = 9\sqrt[4]{a^2}$

Digitized by Google

Ferner ist $\left(2\sqrt[3]{a^2}\right)^3 = 8\sqrt[3]{a^6}$

denn $\left(2\sqrt[3]{a^2}\right)^3 = 2\sqrt[3]{a^2} \times 2\sqrt[3]{a^2} \times 2\sqrt[3]{a^2} =$

$= 8\sqrt[3]{a^2 . a^2 . a^2} = 8\sqrt[3]{a^6}$

und allgemein $\left(m\sqrt[n]{A}\right)^p = m^p\sqrt[n]{A^p}$

§. 178.

Aus einer Wurzel-Größe eine Wurzel zu ziehen.

Es könnte auch verlangt werden, aus einer Wurzel-Größe ferner eine Wurzel von verlangtem Grade auszuziehen. Aus $\sqrt[3]{a^2}$ sollte z. B. die 4te Wurzel ausgezogen, d. i. des Ausdruckes Werth angegeben werden.

$\sqrt[4]{\left(\sqrt[3]{a^2}\right)}$ — Man setze $a^{\frac{2}{3}}$ statt $\sqrt[3]{a^2}$, so ist $\sqrt[4]{\left(\sqrt[3]{a^2}\right)} = \sqrt[4]{\left(a^{\frac{2}{3}}\right)}$. Verwandelt man diese Wurzel-Größe neuerdings in eine Potenz mit gebrochenem Exponenten, so ist $\frac{2}{3}$ der Zähler und 4 der Renner des gebrochenen Exponenten, nämlich:

$\sqrt[4]{a^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{\frac{2}{3}}{4}}$ Da nun ein Bruch $\frac{2}{3}$ durch eine ganze Zahl 4 dividirt wird, wenn man den Renner 3 mit 4 multiplizirt, so ist $\sqrt[4]{a^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{2}{3 \cdot 4}}$, daher

$\sqrt[4]{\left(\sqrt[3]{a^2}\right)} = \sqrt[4]{\left(a^{\frac{2}{3}}\right)} = a^{\frac{2}{3 \cdot 4}}$

und verwandelt man nun $a^{\frac{2}{3 \cdot 4}}$ wieder in eine Wurzel-Größe, so ist

$$\sqrt[4]{\left(\sqrt[3]{a^2}\right)} = \sqrt[3 \cdot 4]{a^2} = \sqrt[12]{a^2}$$

Durch ganz das nämliche Verfahren fände man

$\sqrt[5]{\left(\sqrt[4]{b}\right)} = \sqrt[5]{\left(b^{\frac{1}{4}}\right)} = b^{\frac{1}{4} : 5} = b^{\frac{1}{4 \cdot 5}} = \sqrt[4 \cdot 5]{b} = \sqrt[20]{b}$

und allgemein:

$\sqrt[n]{\left(\sqrt[m]{a}\right)} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}} = a^{\frac{\frac{1}{m}}{n}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$

Digitized by Google

Nämlich man zieht aus einer Wurzel-Größe eine Wurzel von gegebenem Grade, wenn man den Wurzel-Exponenten der gegebenen Wurzel-Größe mit einer Zahl multiplizirt, welche durch die Menge ihrer Einheiten den Grad der geforderten Potenz anzeigt.

Von imaginären Größen.

Die Quadrat-Wurzel aus -16 ist nicht $+4$ denn $(+4) \times (+4) = +16$ und eben so wenig ist diese Wurzel -4, denn $(-4) \times (-4)$ gibt ebenfalls nicht -16 sondern $+16$. Die Quadrat-Wurzel von -16 ist also gar nicht existirend, und man nennt daher $\sqrt{(-16)}$ eine unmögliche oder imaginäre Größe, die sich auch durch $4\sqrt{(-1)}$ hätte ausdrücken lassen, indem

$$\sqrt{(-16)} = \sqrt{(16 \times (-1))} = \sqrt{16} \times \sqrt{(-1)} = 4\sqrt{(-1)}$$

Eben so ist $\sqrt[4]{-a}$, $\sqrt[6]{-a}$, $\sqrt[8]{-a}$; überhaupt jede Wurzel von geradem Exponenten aus einer negativen Größe unmöglich.

§. 179.

Uebersicht der Lehre von den Potenzen und Wurzel-Größen.

Potenzen.

a) Addition und Subtraktion:

$$3a^5 + 7a^5 - 2a^5 = (3 + 7 - 2)\, a^5 = 8a^5$$
$$6a^9 - (-8a^9) = (6 + 8)\, a^9 = 14a^9$$

b) Multiplikation:

$$8a^3 \times 9a^5 = 8 \cdot 9a^{3+5} = 72a^8$$
$$3a^2 \times 6a^3 \times 2a^5 = 3 \cdot 6 \cdot 2\, a^{2+3+5} = 36a^{10}$$
$$5a^3 \times 8b^5 = 5 \cdot 8\, a^3 b^5 = 40\, a^3 b^5$$

c) Division:

$$8a^7 : 4a^3 = \tfrac{8}{4} a^{7-3} = 2a^4$$
$$36a^5 : 12b^6 = \frac{36}{12} \cdot \frac{a^5}{b^6} = \frac{3a^5}{b^6}$$

d) Potenzirung eines Produktes:

$$(ab)^3 = a^3 \cdot b^3$$
$$(abc)^5 = a^5 b^5 c^5$$

Digitized by Google

e) Potenzirung eines Bruches:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^6 = \frac{a^6}{b^6}$$

f) Potenzirung einer Potenz:

$$\left(a^3\right)^5 = a^{15}$$

$$\left((a^2)^3\right)^6 = a^{2.3.6} = a^{36}$$

Wurzel-Größen.

a) Addition und Subtraktion.

$$3\sqrt[5]{a} + 7\sqrt[5]{a} - 2\sqrt[5]{a} = (3+7-2)\sqrt[5]{a} = 8\sqrt[5]{a}$$

$$8\sqrt[3]{b} - (-2\sqrt[3]{b}) = (8+2)\sqrt[3]{b} = 10\sqrt[3]{b}$$

b) Wurzel-Größen gleichnamig zu machen.

$$\sqrt[3]{a^2}\ ,\ \sqrt[5]{b^4}\ ,\ \sqrt[7]{c^8} \quad \text{Hiefür}$$

$$\sqrt[3.5.7]{a^{2.5.7}}\ \sqrt[3.5.7]{b^{4.3.7}}\ \sqrt[3.5.7]{c^{8.3.5}} \quad \text{oder}$$

$$\sqrt[105]{a^{70}}\quad \sqrt[105]{b^{84}}\quad \sqrt[105]{c^{120}}$$

c) Multiplikation von Wurzel-Größen.

$$3\sqrt[5]{a} \times 7\sqrt[5]{b} = 3 \cdot 7\sqrt[5]{ab} = 21\sqrt[5]{ab}$$

$$2\sqrt[3]{a} \times 7\sqrt[3]{b} \times 6\sqrt[3]{c} = 84\sqrt[3]{abc}$$

oder wenn sie nicht gleichnamig sind:

$$2\sqrt[3]{a^2} \times 7\sqrt[4]{b^5} = 2\sqrt[12]{a^{2.4}} \times 7\sqrt[12]{b^{5.3}} =$$

$$= 14\sqrt[12]{a^8 b^{15}}$$

d) Division von Wurzel-Größen.

$$8\sqrt[3]{a} : 2\sqrt[3]{b} = 4\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

oder wenn sie ungleichnamig sind:

$$15\sqrt[3]{a^2} : 3\sqrt[2]{b^5} = 15\sqrt[6]{a^4} : 3\sqrt[6]{b^{15}} -$$

$$= \frac{15}{3}\sqrt[6]{\frac{a^4}{b^{15}}} = 5\sqrt[6]{\frac{a^4}{b^{15}}}$$

Digitized by Google

e) Wurzel aus einem Produkte:

$$\sqrt[5]{ab} = \sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{b}$$

f) Wurzel aus einem Bruche:

$$\sqrt[5]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[5]{b}}$$

g) Wurzel aus einer Wurzel:

$$\sqrt[3]{\left(\sqrt[5]{a^2}\right)} = \sqrt[3.5]{a^2}$$

Digitized by Google

V. Abſchnitt.

Erhebung von algebraiſchen Ausdrücken und von Zahlen ins Quadrat und in den Cubus, und Ausziehen der Quadrat- und Cubik-Wurzel.

§. 180.

Verwandlung mehrgliedriger Größen-Ausdrücke in Binomien.

Wenn wir in einer dreigliedrigen Größe z. B. $3+8+2$ die beiden erſten Glieder 3 und 8 in eine Summe zuſammenfaſſen, ſo erhalten wir die zweigliedrige Größe oder das Binomium $11+2$. Eben ſo könnte man die viergliedrige Größe $7+3+5+4$ in das Binomium $15+4$ verwandeln.

Allgemein kann jede mehrgliedrige Größe auf die Form einer zweigliedrigen gebracht werden, wenn man alle Glieder bis auf eines in eine Summe zuſammenfaßt, nämlich:

$a+b+c+d=(a+b+c)+d$. Letzterer Ausdruck iſt ein Binomium, deſſen erſtes Glied $a+b+c$ und deſſen zweites Glied d iſt.

§. 181.

Den allgemeinen Ausdruck für das Quadrat eines Binomiums zu finden.

Der allgemeinſte Ausdruck für jede zweigliedrige Größe iſt $a+b$. Wäre z. B. das Binomium $\frac{3m}{n^2}-\frac{x^3}{3}$ gegeben, ſo würde $\frac{3m}{n^3}=a$ und $-\frac{x^3}{3}=b$ ſeyn. Um $a+b$ zu quadriren, multiplizire man dieſes Binomium mit ſich ſelbſt, wie folgt:

Digitized by Google

$$\begin{array}{rl} & a + b \\ \times & a + b \\ \hline & a^2 + ab \\ & \quad + ab + b^2 \\ \hline & a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

Nennt man a den ersten nnd b den zweiten Theil des Binomiums a + b, so hat offenbar das Quadrat dieses Binomiums folgende Bestandtheile:

a^2 Quadrat des ersten Theils,

2ab Doppeltes Produkt aus dem ersten Theile in den zweiten,

b^2 Quadrat des zweiten Theiles.

Wenn also irgend eine zweigliedrige Größe quadrirt werden soll, so ist nicht nöthig, sie wirklich mit sich selbst zu multipliziren, sondern da man die Bestandtheile des Quadrates eines Binomiums kennt, so hat man nur diese zu bilden und anzuschreiben; z. B. 3m + 7n soll quadrirt werden.

Hier ist 3m der erste und 7n der zweite Theil des Binomiums; demnach

Quadrat des ersten Theiles . . . . . $9m^2$
Doppeltes Produkt des ersten Theiles in den zweiten $42mn$
Quadrat des zweiten Theiles . . . . . $49n^2$

also: $(3m + 7n)^2 = 9m^2 + 42mn + 49n^3$.

Wenn einer von den beiden Theilen des Binomiums negativ ist, so wird begreiflich auch der zweite Theil des Quadrates, nämlich das doppelte Produkt aus dem ersten Theile in den zweiten negativ, nämlich:

$$(a - b)^3 = a^2 - 2ab + b^2$$

§. 182.

Quadrat mehrgliedriger Größen.

Um eine mehrgliedrige Größe zu quadriren, verwandle man sie zuvor in eine zweigliedrige, und quadrire sie als solche.

Es sey z. B. a + b + o zu quadriren.

Digitized by Google

Es ist $a + b + c = (a + b) + c$.

Also a + b der erste und c der zweite Theil des Binomiums, hienach

Quadrat des ersten Theiles: $(a + b)^2$ oder $a^2 + 2ab + b^2$

Doppeltes Produkt aus dem ersten Th. in den zweiten $2(a+b).c$

Quadrat des zweiten Theiles . . . . . c^2

Demnach:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2 (a + b) c + c^2$$

Auf ähnliche Weise findet man:

$$(a + b + c + d)^2 = [(a + b + c)] + d^2 =$$
$$= (a + b + c)^2 + 2 (a + b + c) d + d^2 =$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b) c + c^2 + 2(a+b+c) d+d^2$$

wo das Gesetz leicht ersichtlich ist, nach welchem die Quadrate mehrgliedriger Größen gebildet werden; nämlich das Quadrat einer beliebig vielgliedrigen Größe hat folgende Bestandtheile:

Quadrat des ersten Theils.

Doppeltes Produkt aus dem ersten Theile in den zweiten.

Quadrat des zweiten Theiles.

Doppeltes Produkt aus der Summe der beiden ersten Theile in den dritten.

Quadrat des dritten Theiles.

Doppeltes Produkt der drei ersten Theile in den vierten.

Quadrat des vierten Theiles u. s. f. bis zum Quadrate des letzten Theiles.

§. 183.

Mehrziffrige Zahlen zu quadriren.

Es unterliegt keinem Zweifel, daß, nachdem man diese Bestandtheile kennt, hienach auch beliebig vielziffrige Zahlen quadrirt werden können; z. B. es sey die Zahl 3842 zu quadriren. Offenbar ist

$3842 = 3000 + 800 + 40 + 2$, demnach

$3000 = a$

$800 = b$ indem man die gegebene Zahl als viergliedrige Größe behandelt und als solche

$40 = c$ quadrirt.

$2 = d$

Man erhält: $a^2 = 3000^2 = 9000000$
$2ab = 2.3000.800 = 4800000$
$b^2 = 800^2 = 64000$
$2(a+b).e = 2.3800.40 = 304000$
$c^2 = 40^2 = 1600$
$2(a+b+c)d = 2.3840.2 = 15360$
$d^2 = 2^2 = 4$

Summe aller Bestandtheile = 1466964 welche Zahl das Quadrat der Zahl 3842 ist.

Die Nullen am Ende der einzelnen Bestandtheile, welche für die Addition von keinem Einflusse sind, hätten auch wegbleiben, und die Stellung der Ziffern durch senkrechte Linien gesichert werden können; nämlich:

$\overset{a\,b\,c\,d}{(3842)^2} = ?$

$a^2 = \ldots 9$							
$2ab \ldots\ldots 4$	8						
$b^2 \ldots\ldots$	6	4					
$2(a+b)c \ldots\ldots$	3	0	4				
$c^2 \ldots\ldots$			1	6			
$2(a+b+c)d \ldots$		1	5	3	6		
$d^3 \ldots$						4	
14	7	6	0	9	6	4	

wobei man ersieht, daß die letzte Ziffer eines jeden folgenden Bestandtheils um eine Stelle weiter nach rechts steht, als die letzte Ziffer des nächst vorhergehenden.

Kommt unter den Ziffern der zu quadrirenden Zahl eine Null vor, so fallen von den zu bildenden Bestandtheilen zwei weg, indem ein ganzes Produkt verschwindet, wenn ein einziger seiner Faktoren Null wird. Z. B.

$\overset{a\,b\,c}{(403)^2} = ?$ Hier ist $a = 4$, $b = 0$, $c = 3$.
Demnach $a^2 = 160000$ $2(a+b).e = 240$
$2ab = 0$ $c^2 = 9$
$b^2 = 0$

Die zwei Stellen, welche 2ab und b^2 für sich in Anspruch genommen hätte, wenn b nicht = 0 wäre, bleiben also leer.

Digitized by Google

§. 184.

Ein Binomium zu cubiren.

Um das Binomium a + b zu cubiren, multiplizire man wirklich a + b mit a + b und das herauskommende Produkt abermals mit a + b, wie folgt:

$$\begin{array}{l} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 + 2a^2 b + ab^2 \\ \quad + a^2 b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

Die Bestandtheile des Cubus eines Binomiums sind demnach folgende:

a^3 Cubus des ersten Theiles.

$3a^2 b$ Dreifaches Produkt aus dem Quadrate des ersten Theils in den zweiten.

$3ab^2$ Dreifaches Produkt aus dem ersten Theile in das Quadrat des zweiten.

b^3 Cubus des zweiten Theils.

§. 185.

Allgemeiner Ausdruck des Cubus einer mehrgliedrigen Größe.

Soll eine vielgliedrige Größe cubirt werden, so verwandle man sie zuerst in eine zweigliedrige und bilde sodann die Bestandtheile des Cubus einer zweigliedrigen Größe. Z. B.

$(a + b + c)^3 = [(a + b) + c]^3 = (a + b)^3 +$
$+ 3 (a + b)^2 c + 3 (a + b) c^2 + c^3$

Setzt man statt $(a + b)^3$ wirklich die bereits bekannten Theile des Cubus eines Binomiums, so erhält man

$(a + b + c)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 + 3 (a + b)^2 c +$
$+ 3 (a + b) c^2 + c^3$

Digitized by Google

Auf ähnliche Art findet man:

$$(a+b+c+d)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c + \\ + 3(a+b)c^2 + c^3 + 3(a+b+c)^2d + \\ + 3(a+b+c)d^2 + d^3$$

Die Bestandtheile des Cubus einer mehrgliedrigen Größe, mit Worten ausgedrückt, sind also:

Cubus des ersten Theils.

Dreifaches Produkt aus dem Quadrate des ersten Theils in den zweiten. —

Dreifaches Produkt aus dem ersten Theile in das Quadrat des zweiten. —

Cubus des zweiten Theils. —

Dreifaches Produkt aus dem Quadrate der beiden ersten Theile in den dritten. —

Dreifaches Produkt aus den drei ersten Theilen in das Quadrat des dritten. —

Cubus des dritten Theils. —

Dreifaches Produkt aus dem Quadrate der drei ersten Theile in den vierten. —

u. s. f. bis zum Cubus des letzten Theils.

§. 186.

Cubiren von mehrgliedrigen Größen und von Zahlen.

Durch Auffindung dieser Bestandtheile des Cubus mehrgliedriger Größen kann man jede mehrgliedrige Größe so wie jede vielziffrige Zahl cubiren. Z. B. $m - 3n + x^2$ soll in die dritte Potenz erhoben werden.

Vergleicht man nämlich das Trinomium $m - 3n + n^2$ mit dem Trinomium

$a + b + c$, so ist $a = m$, $b = -3n$, $c = x^2$, mithin

$$a^3 = m^3$$
$$3a^2b = 3 \cdot m^2 \cdot (-3n) = -9m^2n$$
$$3ab^2 = 3 \cdot m \cdot (-3n)^2 = 3 \cdot m \cdot 9n^2 = \\ = 27mn^2$$
$$b^3 = (-3n)^3 = -27n^3$$

Digitized by Google

$3\,(a+b)^2\,c = 3\,(m-3n)^2\,.\,x^2$

$3\,(a+b)\,c^2 = 3\,(m-3n)\,(x^2)^2 = 3\,(m-3n)\,x^4$

$c^3 = (x^2)^3 = x^6$

Demnach:

$(m-3n+x^2)^3 = m^3 - 9m^2n + 27mn^2 - 27n^3 +$

$+ 3\,(m-3n)^2\,x^2 + 3\,(m-3n)\,x^4 + x^6$

Oder es sei die Zahl 324 zu cubiren.

Es ist $324 = 300 + 20 + 4$

Daher $a = 300$, $b = 20$, $c = 4$

Demnach:

$a^3 = 300^3$	=	27000000
$3a^2\,b = 3\,.\,300^2\,.\,20$	=	5400000
$3ab^2 = 3\,.\,300\,.\,20^2$	=	360000
$b^3 = 20^3$	=	8000
$3\,(a+b)^2\,c = 3\,.\,320^2\,.\,4$	=	1228800
$3\,(a+b)\,c^2 = 3\,.\,320\,.\,4^2$	=	15360
$c^3 = 4^3$	=	64
Summa	=	34012224

Die End-Nullen der einzelnen Theile des Cubus konnte man auch weglassen, und die Stellung der Ziffern durch senkrechte Striche sichern, nämlich:

$\overset{a\,b\,c\,3}{(324)} = ?$

a^3 2	7						
$3a^2\,b$	5	4					
$3ab^2$		3	6				
b^3				8			
$3\,(a+b)^2\,c$	1	2	2	8	8		
$4\,(a+b)\,c^2$			1	5	3	6	
c^3						6	4
$(a+b+c)^3$ . . 3	4	0	1	2	2	2	4

Es ist ersichtlich, daß auch hier, wie beim Quadriren der Zahlen jeder folgende Bestandtheil des Cubus um eine Stelle weiter nach rechts gerückt werden muß.

Digitized by Google

Wenn ferner einer von den Theilen a, b, c ꝛc. Null wird, so fallen alle Bestandtheile des Cubus weg, in welchen dieser Theil als Faktor auftritt, z. B. 402 sey zu cubiren. Hier ist $a = 4$, $b = 0$, $c = 2$, demnach sind die Bestandtheile $3a^2 b$, $3ab^2$ und $b^3 =$ Null, und die Stellen, die sie einnehmen würden, müssen leer gelassen werden.

§. 187.

Vom Ausziehen der Quadrat-Wurzel aus Zahlen.

Da aus einer Zahl die Quadrat-Wurzel ziehen, nichts anders heißt, als sie in zwei gleiche Faktoren zerlegen, so kann es nicht schwer fallen, die Quadrat-Wurzeln aus ein- oder zweiziffrigen Zahlen anzugeben, oder doch zu bestimmen, daß sich aus einer gegebenen solchen Zahl die Quadrat-Wurzel nicht mit Genauigkeit ziehen läßt.

So ist z. B. 4 die Quadrat-Wurzel von 16, 7 die Quadrat-Wurzel von 49 u. s. f.

Dagegen kann man aus 45 die Quadrat-Wurzel nicht mit aller Schärfe ausziehen, indem es keine Zahl gibt, die mit sich selbst multiplizirt, das Produkt 45 liefert. Denn $6 . 6 = 36$ kleiner als 45 und $7 \times 7 = 49$ größer als 45.

Die nächst kleinere Wurzel, wie man sich auszudrücken pflegt, ist also 6, und um die Wurzel näherungsweise zu bestimmen, müßte man zu 6 noch einen Bruch setzen, so daß eine gemischte Zahl entstünde, die mit sich selbst multiplizirt, sehr nahebei das Produkt 45 liefert. Eine solche ist z. B. 6, 708, denn $6, 708 \times 6, 708 = 44, 997264$, welches nur um einige Tausendel der Einheit von 45 verschieden ist.

Sollte aus einer mehrziffrigen genau in zwei Faktoren zerlegbaren Zahl die Quadrat-Wurzel angegeben werden, so müßten wir das entgegengesetzte Verfahren anwenden, als das, wodurch wir weiter oben Zahlen quadrirten. Dort bildeten wir die Bestandtheile des Quadrates und faßten sie in eine Summe zusammen, hier suchen wir sie, und nehmen jeden

Digitized by Google

gefundenen Bestandtheil sogleich von dem gegebenen Quadrate weg, um zu sehen, ob am Ende kein Rest bleibt. Ausziehung der Wurzel und Potenziren stehen sich so gegenüber, wie Division und Multiplikation.

Wir werden leicht finden, wie zu verfahren sey, um aus einer Zahl die Quadrat-Wurzel zu ziehen, sobald wir uns die Methode zu quadriren vor's Auge führen, welche wir eben in Anwendung brachten. Es sey die Zahl $\overset{a\,b\,c}{423}$ zu quadriren.

	I	II	III
$a^2 =$	16		
$2ab =$	1	6	
$b^2 =$		4	
$1(a+b)c =$	25	2	
$c^2 =$			
	17	89	29

Theilen wir das gefundene Quadrat der Zahl 423, nämlich die Zahl 178929 von rechts nach links durch senkrechte Linien in Klassen, deren jede zwei Ziffern hält. *)

Hier kommen in den Klassen der Reihe nach folgende Bestandtheile vor.

I. Kl. Quadrat des ersten Theils der Wurzel nebst einem Theile des Produktes aus dem ersten Theile in den zweiten.

II. Kl. Letzte Ziffer des doppelten Produktes aus dem ersten Theile in den zweiten, Quadrat des zweiten Theils nebst den ersten Ziffern des Produktes aus der Summe der beiden ersten Theile in den dritten.

III. Kl. Letzte Ziffer des ebengenannten Produktes und Quadrat des dritten Theils.

Sollte man daher aus der Zahl 178929 die Wurzel ziehen, so theile man sie von Rechts nach Links durch senkrechte Striche in Klassen von je zwei Ziffern, so weis man, welcher Bestandtheil des Quadrates in jeder Klasse und unter jeder Ziffer vorkommt.

*) Mit Ausnahme der am weitesten nach links stehenden, die auch nur eine Ziffer enthalten kann.

Digitized by Google

	I	II	III	a b c
	17	89	29	423
$a^2 =$	16			
Rest	1	89	29	
$2a =$ . . .	(8)			
$2ab =$	1	6		
$b^2 =$		4		
Summa	1	64		
Rest		25	29	
$2\,(a+b)$ . .		(8	4)	
$2(a+b)\,.\,c =$.		2	5	2
$c^2 =$ . . .				9
Summa		2	5	29
Rest			6	

In der ersten Klasse nämlich finden wir das Quadrat des ersten Theils. Zieht man also aus 17 die nächst kleinere Quadrat-Wurzel, so erhält man den ersten Theil der Wurzel; nämlich 4. Dieser erste gefundne Theil quadrirt gibt $a^2 = 16$, welches Quadrat von der ersten Klasse 17 abgezogen, den Rest 1 läßt, wozu nun die andern Klassen herabgesetzt werden.

In den ersten beiden Ziffern 18 des Gesammt-Restes kommt der Bestandtheil 2ab vor. Nun ist aber $2ab : 2a = b$. Man nehme also den ersten gefundenen Theil doppelt, um 2a zu erhalten, setze ihn unter 18 und dividire, so kommt $b = 2$ zum Vorschein, nämlich der zweite Theil der gesuchten Wurzel.

Multiplizirt man 2a oder 8 mit b oder 2, so erhält man 4ab oder 16, welches Produkt unter 18 zu setzen ist,

Nun bilde man b^2 oder 4 und setze es eine Stelle weiter nach Rechts.

Addirt man nun 2ab oder 16 und b^2 oder 4, so wie sie nach ihrem decadischen Werthe unter einander stehen, so erhält man $2ab + b^2$ oder 164; was vom ersten Rest subtrahirt, den zweiten Rest 2529 gibt.

In diesem Reste 2529 ist noch enthalten $2(a+b)c+c^2$ und zwar findet die letzte Ziffer des Bestandtheiles $2(a+b)c$ ihre Stelle unter der ersten Ziffer 2 der letzten Klasse 29.

Digitized by Google

Dividirt man $2(a+b)c$ oder hier 252 durch $2(a+b)$ oder 84, so erhält man: $\frac{2(a+b)c}{2(a+b)} = c$ nämlich den dritten Theil c der Wurzel, hier 3, wonach es leicht ist, die übrigen Bestandtheile des Quadrates zu bilden und vom vorigen Reste zu subtrahiren, der letzte Rest wird = 0 ein Anzeichen, daß 423 genau die Quadrat-Wurzel von 178939 ist.

§. 188.

Abgekürztes Verfahren.

Bei diesem Verfahren, die Quadrat-Wurzel aus einer mehrziffrigen Zahl zu ziehen, kann man auch die Abkürzung eintreten lassen, daß man den jedesmal gefundenen Quotienten zu dem entsprechenden Divisor zur rechten Hand anhängt und sodann den dadurch erhaltenen Faktor mit dem eben gewonnenen Divisor multiplizirt, indem $2ab + b^2$ gleichgeltend ist mit dem Ausdrucke $(2a + b) \cdot b$.

Nämlich:

				a b c
	17	89	39	423
$a^2 =$	16			
	1	89	29	
$2a =$	(8)			
$2ab =$	1	6		
$b^2 =$		4		
S.	1	64		
Rest		25	29	
$2(a+b) =$		(8	4)	
$2(a+b)c =$		25	2	
$c =$			9	
$S_1 =$		25	29	
Rest		0		

oder kürzer:

			a b c
	17	89	29	423
$a^2 =$	16			
	1	89		
$2a+b =$	(8 | 2)		
$2ab+b^2 =$	1	64		
Rest		25	29	
$2(a+b)+c =$		(8 | 43)	
$2(a+b)c+c =$		25	29	
Rest		0		

Das Verfahren, welches angewendet wird, aus Zahlen, die keine wirklichen Quadrate sind, die Irrational-Wurzel auszuziehen, ist von dem beschriebenen nicht verschieden, nur bleibt ein Rest. Z. B.

Digitized by Google

$\sqrt{892372} = ?$

				a b c
89	23	72		944
81				
8	23			
(1	84)			
7	36			
	87	72		
(	18	84)		
	75	36		
	12	36		

Von der Richtigkeit der Rechnung überzeugt man sich, wenn man die gefundene Wurzel mit sich selbst multiplizirt, zum Produkte den Rest addirt. Ist kein Irrthum in der Rechnung vorgefallen, so muß begreiflich die Zahl wieder zum Vorschein kommen, aus welcher die Wurzel gezogen wurde. Wirklich ist in vorliegendem Beispiele

$$944 \times 944 = 891136 \text{ und}$$

$$891136 + 1236 = 892372$$

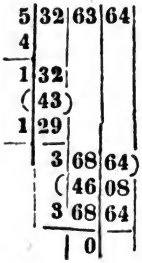
Wenn der Fall auftritt, daß ein Divisor größer ist, als der zugehörige Dividend, so wird der Quotus oder der entsprechende Theil der Wurzel = 0, und so werden auch alle Produkte = 0, in welchen dieser Theil der Wurzel vorkommt. Z. B. aus 5326864 soll die Quadrat-Wurzel gezogen werden.

					a b c d
5	32	68	64		2308
4					
1	32				
(	43)				
1	29				
	3	68			
*	(4	60)			
	0	00			
	3	68	64		
	(46	08)			
	3	68	64		
		0			

Man ersieht leicht, daß hier das mit * bezeichnete 460 (oder 2 (a + b) + c) mit dem Quotienten 0 multiplizirt, ein Produkt = 0 geben müsse, welches von 368 subtrahirt, den alten Rest 368 wieder gibt, wozu man nun die nächste Klasse 64 herabsetzt, und dann durch das Doppelte von 230 dividirt.

Digitized by Google

Kürzer würde man verfahren haben, wenn man die Einflußlosen Nullen weggelassen hätte, nämlich:



§. 188.

Verfahren beim Ausziehen der Cubik-Wurzel im Allgemeinen.

Das Verfahren bei Ausziehung von Cubik-Wurzeln ist auf ganz ähnliche Gründe gestützt, als das Ausziehen der Quadrat-Wurzeln. Da man nämlich die Bestandtheile des Cubus mehrgliedriger Größen oder vielziffriger Zahlen kennt, so entwickelt man diese Bestandtheile, und subtrahirt sie allmälig von der Zahl, aus welcher die Cubik-Wurzel gezogen werden soll. Bleibt am Ende kein Rest, so ist die Cubik-Wurzel rational, im entgegengesetzten Falle irrational.

Wie aus den Gesetzen, nach welchen wir Zahlen cubirten, hervorgeht, setzt man jeden folgenden Bestandtheil um eine Stelle weiter nach rechts. Die Theile der Wurzel findet man auf ähnliche Art durch Division, wie weiter oben die Theile der Theile der Quadrat-Wurzel. Speciell wird das Verfahren an Beispielen dargestellt werden.

§. 189.

Aus Zahlen, die nicht über 3 Ziffern haben, die Cubik-Wurzel zu ziehen.

Aus Zahlen, die weniger als 4 Ziffern haben, zieht man die Cubik-Wurzel unmittelbar durch Hülfe nachstehenden Täfelchens aus.

Digitized by Google

Zahlen	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrate	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cuben	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Demnach ist

$\sqrt[3]{1} = 1$ $\quad$ $\sqrt[3]{125} = 5$

$\sqrt[3]{8} = 2$ $\quad$ $\sqrt[2]{216} = 6$

$\sqrt[3]{27} = 3$ $\quad$ $\sqrt[3]{343} = 7$

$\sqrt[3]{64} = 4$ $\quad$ $\sqrt[4]{512} = 8$

$\sqrt[3]{729} = 9$

Ferner wird $\sqrt[3]{29} = 3$ nebst einem Bruche seyn; denn 4 kann nicht die Cubik-Wurzel seyn, weil 4.4.4 schon = 64 und 2 ist sie auch nicht, weil 2.2.2 nur = 8 ist, sie fällt also zwischen 3 und 4. Man nennt 3 die nächst kleinere Cubik-Wurzel von 29.

So ist 7 die nächst kleinere Cubik-Wurzel von 418 und überhaupt von allen den Zahlen, die zwischen 343 und 512 fallen.

§. 190.

Aus Zahlen, die mehr als 3 Ziffern haben, die Cubik-Wurzel zu ziehen.

Cubirt man die Zahl 23, so erhält man da a = 20 und b = 3.

a^3 =	8
$3a^2b$ =	36
$3ab^2$ =	54
b^3 =	27
$(a+b)^3$ =	12167

Theilt man diesen Cubus, nämlich 12167 von Rechts nach Links in Klassen, so daß in jede 3 Ziffern zu stehen kommen, mit Ausnahme der ersten Klasse von Links, in welcher vielleicht auch nur eine oder zwei Ziffern stehen, nämlich:

Digitized by Google

I	II	III	IV
1 2	1	6	7

so findet man, daß unter I enthalten ist Cubus des ersten Theiles 2, nebst dem, was sich vom nächstfolgenden Bestandtheile herüberzählt; unter II. das 3fache Produkt aus dem Quadrat des ersten Theils in den zweiten, nebst dem, was sich vom nächsten Bestandtheile herüber zählt, ferner unter III ist enthalten $3ab^2$ und unter IV b^3.

Sollte demnach aus 12167 die Cubik-Wurzel gezogen werden, so theile man diese Zahl von Rechts nach Links durch senkrechte Striche in dreiziffrige Klassen, wie folgt:

		a b
12	167	2 3
a^3 8		
4	167	
$3a^2$ . . . . . (1	2)	
$3a^2 b$ 3	6	
$3ab^2$	54	
b^3	27	
	7	

Aus der ersten Klasse 12 ziehe man die nächstkleinere Cubik-Wurzel, sie ist 2 und gibt den Theil a. Diesen Theil cubire man, setze den Cubus unter 12 und subtrahire, so erhält man als Rest 4167.

Da nun die letzte Ziffer von dem dreifachen Produkte aus dem Quadrat des ersten Theiles in den zweiten unter der ersten Ziffer 1 der 2ten Klasse Platz findet, so daß nämlich in 41 $3a^2$ enthalten ist, so dividire man 41 durch $3a^2$ oder in Zahlen: durch $3 . 2^2$ oder 12. Der Quotient 3 wird der zweite Theil der Wurzel seyn, denn $3a^2 b : 3a^2 = b$.

Dieser zweite Theil mit dem Divisor 12 multiplizirt, gibt $3a^2 b$.

Ferner bildet man $3ab^2$ oder hier $3 . 2 . 3^2 = 3 . 2 . 9 = 54$ und setzt diesen Bestandtheil eine Stelle weiter nach Rechts.

Digitized by Google

Endlich bildet man den Cubus des zweiten Theils, nämlich b^3 oder hier $3^3 = 27$, und rückt auch diesen Bestandtheil eine Stelle weiter nach Rechts.

Die 3 Bestandtheile $3a^2 b$, $3ab^2$ und c^3 addirt, und vom Rest 4167 abgezogen, lassen 0 übrig, woraus ersichtlich ist, daß diese Cubik-Wurzel rational ist.

Würde die Zahl um 3 Ziffern mehr haben, so müßte begreiflich das nämliche Verfahren weiter fortgesetzt werden, nur daß jetzt nicht durch das 3fache Quadrat des ersten Theils, sondern durch das 3fache Quadrat der beiden ersten Theile dividirt werden müßte, um den dritten Theil der Wurzel zu erhalten. Z. B. aus der Zahl 20346317 die Cubik-Wurzel zu ziehen.

	20	346	317	a b c 273
$a^3 = 2 . 2 . 2 =$ . .	8			
Rest	12	346	....	
$3a^2 = 3 . 2^2 =$ . . .	(1	2)		
$2a^2 b = 3 . 2^2 7 =$.	8	4		
$2ab^2 = 3 . 2 . 7^2 =$.	2	94		
$b^3 = 7^3 =$		343		
Summe	11	683		
Rest		663	317	
Divis. $3(a+b)^2 = 3 . 27^2 =$		(218	7)	
$3(a+b)^2 c = 3 . 27^2 . 3 =$		656	1	
$3(a+b)c^2 = 3 . 27 . 3^2 =$		7	29	
$c^3 = 3^3 =$			27	
Summe		663	317	
Rest		0		

Den ersten Theil a oder 3 erhielt man, indem man aus 20 die nächstkleinere Wurzel zog.

b oder 7 indem man 123 durch 12 dividirte, wo aber nicht 10 als Quotus genommen werden darf, indem zu 123 sich auch noch Ziffern von $3ab^2$ herüberzählen.

b oder 3 wurde gewonnen, indem man 6633 durch 2187 dividirte.

Wird einer der Quotienten oder Theile der Wurzel = 0 so verschwinden alle Produkte, die diesen Theil als Faktor enthalten, und nachdem dieser Quotient 0 angeschrieben ist, wird sogleich die nächste Klasse herabgesetzt, z. B. aus 28094464 die Cubik-Wurzel zu ziehen:

Digitized by Google

				abc
	28	094	464	304
$a^3 =$	27			
Rest	1	094	. . .	
$3a^2$	(2	7)		
$3a^2 b$	0	0		
$3ab^2$		00		
b^3		00		
Summe . . .	0	000		
Rest	1	094	464	
$3(a+b)^2$	(270	0)		

u. s. f.

				abc
	28	094	564	304
$a^3 =$	27			
od. kürzer	1	094	464	
$3a^2 b =$		(270	0)	
	1	080	0	

u. s. w.

§. 191.

Aus einem Dezimal-Bruche die Quadrat-Wurzel zu ziehen.

Aus Zahlen, deren erste Ziffer 1, die andern aber durch eine gerade Anzahl von Nullen, nämlich 2, 4, 6, 8 ꝛc. ersetzt sind, kann immer die Quadrat-Wurzel genau gezogen werden, nämlich:

$$\sqrt{100} = 10 \qquad \sqrt{1000000} = 1000$$

$$\sqrt{10000} = 100 \qquad \sqrt{100000000} = 10000$$

u. s. w.

Um daher aus einem Dezimal-Bruche die Quadrat-Wurzel zu ziehen, verschaffe man vor Allem dem Dezimal-Bruche eine gerade Anzahl von Dezimal-Stellen, wenn er diese nicht bereits hat, ziehe dann die Quadrat-Wurzel ohne Rücksicht auf das Comma aus und schneide in der Wurzel halb so viele Dezimalstellen ab, als deren der Dezimal-Bruch hatte, aus dem man die Wurzel zog, z. B.

$$\sqrt{0{,}00144} = \sqrt{0{,}001440} = \sqrt{\left(\frac{1440}{1000000}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{1440}}{\sqrt{1000000}} = \frac{\sqrt{1440}}{1000} = \frac{38^*)}{1000} = 0{,}038$$

*) Eigentlich 37 mit einem Bruche, indessen kommt 38 der Wahrheit näher.

Nach dem nämlichen Verfahren kann man Irrational-Wurzeln beliebig genau ausziehen, indem man die Zahl durch Anhängen von Nullen in einen Dezimal-Bruch verwandelt, so ist z. B.

$$\sqrt{13} = \sqrt{13{,}0000} = 3{,}60.$$

§. 192.

Aus einem Dezimal-Bruche die Cubik-Wurzel zu ziehen.

Aus Zahlen, die zur ersten Ziffer 1, an der Stelle der andern aber eine solche Anzahl von Nullen haben, die durch 3 ohne Rest dividirbar ist, z. B. 1000, 1000000, 1000000000 u. s. w. kann immer die Cubik-Wurzel ohne Rest gezogen werden, nämlich:

$$\sqrt[3]{1000} = 10 \qquad \sqrt[3]{1000000000} = 1000$$

$$\sqrt[3]{1000000} = 100 \qquad \sqrt[3]{1000000000000} = 10000$$

u. s. w.

Um also aus irgend einem Dezimal-Bruche die Cubik-Wurzel zu ziehen, verschaffe man ihm durch Anhängung von Nullen eine Anzahl von Dezimal-Stellen, die sich ohne Rest durch 3 dividiren läßt, ziehe dann die Cubik-Wurzel ohne Rücksicht auf das Comma aus, und schneide in der Wurzel den dritten Theil so viel Dezimal-Stellen ab, als in dem Dezimal-Bruche vorkamen, z. B.

$$\sqrt[3]{0{,}2351} = \sqrt[3]{0{,}235100} = \sqrt[3]{\left(\frac{235100}{1000000}\right)} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{235100}}{\sqrt[3]{1000000}} = \sqrt[3]{\left(\frac{235100}{100}\right)} = \frac{61}{1000} = 0{,}61$$

Digitized by Google

So kann auch aus jeder beliebigen Zahl ihre irrationale Wurzel mit beliebig weitgetriebener Genauigkeit näherungsweise ausgezogen werden, wenn man die Zahl in einen Dezimal-Bruch mit einer Anzahl von Dezimal-Stellen verwandelt, die durch 3 theilbar ist. Z. B.

$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5{,}000000}$$

Zieht man nun aus 5000000 die Cubik-Wurzel, so muß man zwei Dezimalen abschneiden.

Digitized by Google

VI. Abſchnitt.

Von den Gleichungen.

§. 193.

Begriffs-Erklärung.

Die nämliche Größe kann in verſchiedene Formen des Ausdrucks gebracht werden. So hat z. B. jeder der Ausdrücke $5 + 3$, 2^3, $\frac{32}{4}$, $17 - 9$ u. ſ. w. den Werth 8.

Verbindet man nun zwei verſchieden geſtaltete Ausdrücke einer und der nämlichen Größe durch das Gleichheits-Zeichen (=), ſo erhält man eine Gleichung; ſo ſind aus obigem Beiſpiele folgende Gleichungen bildbar:

$$5 + 3 = 2^3$$

$$\frac{32}{4} = 17 - 9 \quad \text{u. ſ. w.}$$

Die beiden Ausdrücke für die nämliche Größe, die rechts und links vom Gleichheits-Zeichen ſtehen, heißen Seiten der Gleichung. Jede Gleichung hat demnach zwei Seiten.

Die einzelnen durch + oder — mit einander verbundenen Theile der Seiten nennt man Glieder der Gleichung. So hat z. B. die Gleichung $\frac{32}{4} = 17 - 9$ drei Glieder, nämlich: $\frac{32}{4}$, 17, und — 9.

Durch Gleichungen pflegen wir die Beziehungen zwiſchen bekannten und unbekannten Größen darzuſtellen. Wüßten wir z. B. daß die Hälfte und der dritte Theil einer gewiſſen

Digitized by Google

Zahl, die wir vorläufig nicht kennen, zusammengenommen, 20 gäbe, so könnten wir, wenn diese unbekannte Zahl durch x ausgedrückt würde, folgende Gleichung bilden:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 20.$$

§. 194.

Verschiedene Benennungen von Gleichungen.

Gleichungen der Art nennt man aufgelößt, wenn die unbekannte Größe ganz allein, mit dem Exponenten und Coefficienten + 1 auf der einen, dagegen aber auf der andern Seite nur Bekanntes steht.

Nach dem höchsten Exponenten der unbekannten Größe wird der Grad der Gleichung bestimmt. So sagt man, eine Gleichung sey vom ersten Grade, wenn darin der höchste Exponent 2, vom dritten, wenn er 3, vom nten, wenn er n ist.

$x^3 - ax^2 = cx - d$ ist z. B. eine Gleichung vom 3ten Grade.

Gleichungen vom zweiten Grade nennt man auch quadratische, vom dritten cubische.

Gleichungen vom höherem als dritten Grade pflegt man höhere zu nennen.

Gleichungen heißen rein, wenn die unbekannte Größe nur unter einerlei Exponenten auftritt, im entgegengesetzten Falle unrein oder gemischt. So ist z. B. $\frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 12$ eine reine, dagegen $x^2 - 5x = 13$ eine unreine quadratische Gleichung.

§. 195.

Anwendung des Grundsatzes: Gleiches auf gleiche Weise verändert, bleibt gleich.

Es ist ein Grundsatz von unumstößlicher Wahrheit, daß Gleiches auf gleiche Weise verändert, auch nach der Veränderung noch gleich bleibt.

Digitized by Google

Man kann also, ohne die Wahrheit einer Gleichung im Mindesten zu stören, auf beiden Seiten derselben die nämliche Größe addiren, von beiden Seiten die nämliche Größe subtrahiren, beide Seiten mit der nämlichen Größe multipliziren, durch die nämliche dividiren, beide Seiten in dieselben Potenzen erheben oder Wurzeln von dem nämlichen Grade aus beiden Seiten ziehen: überhaupt leidet eine Gleichung nicht, wenn man beide Seiten derselben der nämlichen Rechnungs-Operation unterzieht.

§. 197.

Trennung des Bekannten vom Unbekannten im Allgemeinen und Versetzung eines Gliedes auf die andere Seite.

Um eine Gleichung aufzulösen, müssen wir die bekannten Größen von der unbekannten zu trennen wissen, und eben dieß ist uns möglich, wenn wir den so eben ausgesprochenen allgemeinen Satz zweckmäßig in Anwendung bringen.

Es sey, um solches nachzuweisen, in der Gleichung $a + bx = c - dx$ alles Bekannte auf die rechte, und alles Unbekannte auf die linke Gleichungs-Seite zu schaffen, natürlich, ohne der Wahrheit der Gleichung zu nahe zu treten.

$$a + bx = c - dx$$

Man addire auf beiden Seiten die Größe $+ dx$, so erhält man: $a + bx + dx = c - dx + dx$ oder da $- dx + dx = 0$, ergibt sich:

$$a + bx + dx = c$$

Ferner subtrahire man auf beiden Seiten die Größe $+ a$, so erhält man:

$$a + bx + dx - a = c - a$$

oder da $a - a = 0$:

$$bx + dx = c - a$$

woraus man ersieht, daß man in einer Gleichung irgend ein Glied von einer Seite auf die andere schaffen kann, wenn man das Vorzeichen desselben in das entgegengesetzte verwandelt.

Digitized by Google

§. 198.

Wegschaffung eines Faktors und Divisors aus einem Gliede.

Sollte aus irgend einem Gliede einer Gleichung ein Faktor hinweggeschafft werden, so dividire man jede Seite der Gleichung durch eben diesen Faktor, z. B. in $ax+b=cx-d$ sollte im ersten Gliede der Faktor a weggeschafft werden.

Da $ax + b = cx - d$

so ist offenbar auch

$$\frac{ax + b}{a} = \frac{cx - d}{a}$$ oder durch wirkliche Division:

$$\frac{ax}{a} + \frac{b}{a} = \frac{cx}{a} - \frac{d}{a}$$ oder

$$x + \frac{b}{a} = \frac{cx}{a} - \frac{d}{a}$$

Man hat also den Faktor a im ersten Gliede weggeschafft, indem man ihn daselbst wegließ, aber alle übrigen Glieder der Gleichung durch a dividirte.

Ein Divisor dagegen oder Nenner würde aus einem Gliede einer Gleichung weggeschafft, wenn man ihn hier wegließe, und alle übrigen Glieder der Gleichung mit diesem Divisor multiplizirte. Es soll z. B. im zweiten Gliede der Gleichung:

$$a + \frac{bx}{c} = d - ex$$ der Divisor c weggeschafft werden:

Da $a + \frac{bx}{c} = d - ex$, so ist auch

$$\left(a + \frac{bx}{c}\right) \times c = (d - ex) \times c$$

d. i. $ac + \frac{bcx}{c} = cd - cex$ oder

$$ac + bx = cd - cex.$$

Digitized by Google

§. 199.

Zusammenfassen der Coefficienten der unbekannten Größe.

Wenn die unbekannte Größe in mehreren Gliedern der Gleichung mit Coefficienten behaftet auftritt, so faßt man diese Coefficienten in eine Summe zusammen, die man, wenn wegen Ungleichartigkeit der Coefficienten die Addition nicht wirklich ausgeführt werden kann, in Klammern einschließt, und hinter diesen Ausdruck die unbekannte Größe nur einmal anschreibt. Z. B. statt

$ax + bx - cx = d$, setzt man

$(a + b - c) . x = d$

oder statt:

$3x + 5x - 2x = 17$ schreibt man

$(3 + 5 - 2) . x = 17$

$6x = 17.$ und so in andern Fällen.

§. 200.

Anwendung des Bisherigen auf die Lösung von Gleichungen.

Nun wird es uns nicht schwer fallen, nachfolgende Gleichungen aufzulösen.

1) Die gegebene Gleichung sey: $ax + b = c.$

$ax + b = c$

$ax = c - b$ indem auf beiden Seiten b subtrahirt wurde.

Schafft man den Faktor a durch Division weg, so erhält man:

$$x = \frac{c-b}{a}$$ wonach die Gleichung aufgelößt ist.

2) $\frac{ax}{b} + \frac{cx}{d} + e = f - \frac{gx}{h}$ ist aufzulösen. Aus dieser Gleichung folgt

$ax + \frac{bcx}{d} + be = bf - \frac{bgx}{h}$, indem man den Divisor b wegschafft.

Digitized by Google

Ferner hieraus:

$$adx + bcx + bde = bdf - \frac{bdgx}{h}$$

indem man alle Glieder mit d multiplizirte. Schreitet man nun zur Wegschaffung von h, so erhält man:

$$adhx + achx + bdeh = bdfh - bdgx$$

Nun schaffe man alle bekannten Glieder auf die rechte und alle, welche x enthalten, auf die linke Gleichungs-Seite, so hat man:

$$adhx + bchx + bdgx = bdfh - bdeh$$

Faßt man hierauf die Coefficienten von x in eine Summe zusammen, so erhält man:

$$(adh + bch + bdg)\, x = bdfh - bdeh.$$

Endlich dividire man beiderseits durch die Summe der Coefficienten, so erhält man als aufgelößte Gleichung:

$$x = \frac{bdfh - bdeh}{adh + bch + bdg}$$

3) Die Gleichung $a(b - cx) = d(e - fx)$ sey aufzulösen:

$$a(b - cx) = d(e - fx)$$

Erstlich vollziehe man die angedeutete Multiplikation wirklich, so erhält man: $ab - acx = de - dfx$

Hieraus durch Versetzung der Glieder:

$$dfx - acx = de - ab$$

Mithin: $(df - ac)\, x = de - ab$

Folglich: $$x = \frac{de - ab}{df - ac}$$

4) Ferner sey die Gleichung gegeben:

$$\frac{a}{x} - \frac{b}{x} + c = d$$

Man multiplizire alle Glieder mit x, so erhält man:

$$a - b + cx = dx$$

Also: $cx - dx = b - a$

$(c - d)\, x = b - a$ und daher

$$x = \frac{b - a}{c - d}$$

Digitized by Google

§. 200.

Unbestimmte Gleichungen.

Wenn in einer Gleichung zwei unbekannte Größen vorkommen, so kann sie nicht aufgelöst, oder keine der unbekannten Größen kann daraus bestimmt werden. Eine Gleichung der Art heißt daher unbestimmt. So ist z. B. die Gleichung $3x + 4y = 12$ eine unbestimmte; aus derselben folgt

wohl $x = \frac{12 - 4y}{3}$

und $y = \frac{12 - 3x}{4}$

aber weder x noch y tritt durch diese Auflösungen als bekannt und bestimmt auf.

§. 201.

Lösung zweier Gleichungen mit zwei unbekannten Größen.

Wenn zwei Gleichungen, in deren jeder die zwei nämlichen unbekannten Größen vorkommen, gegeben sind, so läßt sich jede der beiden unbekannten Größen finden, d. i. durch lauter bekannte Größen ausdrücken. Z. B. die beiden gegebenen Gleichungen seyen:

$$\left.\begin{array}{l} \text{I } 3x + 5y = 66 \\ \text{II } 8x - 2y = 38 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \frac{66 - 5y}{3} \\ x = \frac{38 + 2y}{8} \end{array}$$

Diese beiden Werthe von x stelle man in eine neue dritte Gleichung zusammen, so erhält man:

$$\text{III } \frac{66 - 5y}{3} = \frac{38 + 2y}{8}$$ in welcher nur y und Bekanntes vorkommen, und aus welcher man daher y bestimmen kann. Man erhält durch Auflösung:

$$8 \cdot (66 - 5y) = 3\,(38 + 2y)$$
$$528 - 40y = 114 + 6y$$

Digitized by Google

Damit das zweite Glied positiv werde, multiplizire man alle Glieder mit (— 1), so erhält man:

$$-528 + 40y = -114 - 6y$$

Mithin durch Versetzung:

$$40y + 6y = 528 - 114$$

d. i. $46y = 417$

und $$y = \frac{414}{46} = 9$$

Diesen Werth von y, nämlich 9, setze man in einen von den beiden Ausdrücken von x, die aus den gegebenen Gleichungen gefolgert wurden, so erhält man:

$$x = \frac{66 - 5y}{3} = \frac{66 - 5 \cdot 9}{3} = \frac{66 - 45}{3} =$$

$$= \frac{21}{3} = 7$$ welches der Werth von x ist, den man auch erhalten haben würde, wenn man den gefundenen Werth von y in den andern Ausdruck von x, nämlich $x = \frac{38 + 2y}{8}$ substituirt hätte.

Ausser dieser Art der Auflösung zweier Gleichungen mit zwei unbekannten Größen gibt es noch andere Mittel, die wir hier der Kürze halber um so leichter übergehen können, als die gezeigte Methode immer zum Ziele führt.

§. 202.

Lösung dreier Gleichungen mit drei unbekannten Größen.

Sind drei Gleichungen gegeben, deren jede die nämlichen drei unbekannten Größen enthält, so kann man auf ähnliche Art jede der drei unbekannten Größen finden, wie aus folgendem Beispiele erhellen wird. Die drei gegebenen Gleichungen seyen

$$\text{I } 2x + 3y - 5z = 46$$
$$\text{II } 3x + 7y - 4z = 12$$
$$\text{III } 2y + 9z - 6x = 64$$

Digitized by Google

Man entwickle vor Allem aus jeder dieſer gegebenen Gleichungen einen Werth für x, ſo erhält man:

$$\text{aus I } x = \frac{46 - 3y - 5z}{2}$$

$$\text{aus II } x = \frac{12 - 7y + 4z}{3}$$

$$\text{aus III } x = \frac{3y + 9z - 64}{6} \text{ *)}$$

Den erſten und zweiten, und ſo auch den zweiten und dritten Werth von x ſtellt man nun in zwei neue Gleichungen zuſammen, ſo erhält man:

$$\text{IV } \frac{46 - 3y - 5z}{2} = \frac{12 - 7y + 4z}{3} \text{ und}$$

$$\text{V } \frac{12 - 7y + 4z}{3} = \frac{2y + 9z - 64}{6}$$

Da dieſe beiden Gleichungen auſſer den beiden unbekannten Größen y und z nur Bekanntes enthalten, ſo kann man nach dem vorigen §. aus denſelben ſowohl y als z entwickeln. Man findet:

$$y = 5 \text{ und } z = 8.$$

Subſtituirt man nun dieſe Werthe von y und z in den Ausdruck von x, den wir aus der erſten der beiden gegebenen Gleichungen erhielten, nämlich in $\frac{46 - 3y - 6z}{2}$ ſo erhält man x in lauter Bekanntem ausgedrückt, nämlich:

$$x = \frac{61 - 3y - 5z}{2} = \frac{61 - 3 \cdot 5 - 5 \cdot 8}{2} =$$

$$= \frac{61 - 15 - 40}{2} = \frac{61 - 55}{2} = 3$$

---

*) Nämlich: $2y + 9z - 6z = 64$. Multiplizirt man, um $(-x)$ poſitiv zu machen, alle Glieder mit (-1) ſo ergibt ſich $-2y - 9z + 6x = -64$ woraus nun obiger Werth von x leicht folgt.

Digitized by Google

Aehnlich ist das anzuwendende Verfahren, wenn mehr als drei Gleichungen mit so vielen unbekannten Größen als Gleichungen gegeben sind.

§. 202.

Auflösung der reinen quadratischen Gleichung.

Die allgemeine Form der reinen quadratischen Gleichung ist: $x^2 = A$

wo A irgend eine Verbindung von bekannten Größen bezeichnet. Um diese Gleichung aufzulösen, braucht man nur auf beiden Seiten die Quadrat-Wurzel auszuziehen,

nämlich: $x^2 = A$

Mithin: $(\sqrt{x^2}) = \sqrt{A}$

d. i. $x = \sqrt{A}$

Da $(+\sqrt{A}) \times (+\sqrt{A}) = +\sqrt{(A^2)} = +A$

und $(-\sqrt{A}) \times (-\sqrt{A}) = +\sqrt{(A^2)} = +A$

so bleibt es hier unbestimmt, ob $x = \sqrt{A}$ oder $= -\sqrt{A}$, was man so ausdrückt:

$$x = \pm\sqrt{A}$$

Wenn eine reine quadratische Gleichung gegeben ist, so muß man dieselbe, ehe man zur wirklichen Auflösung schreiten kann, zuvor auf obige Form bringen. Es sey z. B. die quadratische Gleichung

$$\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{5} - 144 = \frac{x^2}{6} + 3415$$

Man schaffe den Divisor 4 weg:

$$x^2 + \frac{4x^2}{5} - 376 = \frac{4x^2}{6} + 13660$$

Ferner den Divisor 5:

$$5x^2 + 4x^2 - 2880 = \frac{20x^2}{6}* + 68300$$

*) Statt $\frac{20}{6}$ hätte man auch setzen können: $\frac{10}{3}$

Den Divisor 6:

$$30x^2 + 24x^2 - 17280 = 20x^2 + 409800$$

Mithin: $(30 + 24 - 20)\,x^2 = 17280 + 409800$

oder: $34x^2 = 427080$

$$x^2 = \frac{427080}{34}$$ wodurch also die gegebene Gleichung auf die Form $x^2 = A$ gebracht ist, und sie kann demnach aufgelößt werden, wenn man aus dem Bruche $\frac{427080}{34}$ die Quadrat-Wurzel zieht, nachdem man ihn zuvor in einen Dezimal-Bruch verwandelt hat.

§. 209.

Auflösung der unreinen quadratischen Gleichung.

Die allgemeinste Form jeder unreinen quadratischen-Gleichung ist $x^2 + px = q$.

Vergleicht man die linke Seite $x^2 + px$ mit der Form für das Quadrat einer zweitheiligen Größe, nämlich:

$$x^2 + p \cdot x$$
$$a^2 + 2b.a + b^2$$

so sieht man, daß im Ausdrucke $x^2 + px$ das Quadrat des zweiten Theiles fehlt, und daß p den doppelten zweiten Theil darstellt, nämlich: $2b \cdot a$ entspricht dem Ausdrucke $p \cdot x$, da nun oben a und unten x der erste Theil ist, so muß p dem 2b entsprechen, also der doppelte zweite Theil seyn. Halbirt man demnach den Coefficienten p, so gewinnt man den zweiten Theil, und addirt man das Quadrat dieses zweiten Theiles, nämlich: $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ oder $\frac{p^2}{4}$ zum Ausdrucke $x^2 + px$, so hat man ein vollständiges Quadrat: $x^2 + px + \frac{p^2}{4}$ dessen Wurzel das Binomium $x + \frac{p}{2}$ ist.

Digitized by Google

Um sich hievon noch unmittelbarer zu überzeugen, quadrire man $x + \frac{p}{2}$ wirklich, nämlich:

$$\begin{array}{rl} & x + \frac{p}{2} \\ \times & x + \frac{p}{2} \\ \hline & x^2 + \frac{px}{2} \\ & \quad + \frac{px}{2} + \frac{p^2}{4} \\ \hline & x^2 + \frac{2px}{2} + \frac{p^2}{4} \text{ oder } x^2 + px + \frac{p}{4} \end{array}$$

Nunmehr wird es uns nicht schwer fallen, die unreine quadratische Gleichung $x^2 + px = q$ aufzulösen; nämlich vor allem nimmt man die Hälfte $\frac{p}{2}$ des Coefficienten p, quadrirt diese, und addirt das Quadrat auf beiden Gleichungs-Seiten, nämlich: $x^2 + px + \frac{p^2}{4} = q + \frac{p^3}{4}$

Nun ziehe man aus beiden Seiten der Gleichung die Quadrat-Wurzel, so erhält man;

$$x + \frac{p}{2} = + \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}$$

Endlich schaffe man das bekannte Glied $\frac{p}{2}$ auf die andere Seite, so ist $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}$

und die Gleichung demnach gelößt.

Gleichungen, die noch nicht die Form $x^2 + px = q$ haben, muß man, bevor zur Auflösung geschritten werden kann, auf dieselbe bringen. Es soll z. B. die Gleichung

Digitized by Google

$5x^2 - 7x = 203 - x$ aufgelöst werden. Man erhält:

$$5x^2 - 7x + x = 203$$

$$5x^2 - 6x = 203$$

$$x^2 - \frac{6x}{5} = \frac{203}{5}$$ welche Gleichung bereits die Form $x^2 + px = q$ hat, indem $p = -\frac{6}{5}$ und $q = \frac{203}{5}$

Addirt man auf beiden Seiten das Quadrat der Hälfte vom Coefficienten $-\frac{6}{5}$ nämlich: $\left(-\frac{3}{5}\right)^2$ d. i. $\frac{9}{25}$ so ergibt sich: $x^2 - \frac{6x}{5} + \frac{9}{25} = \frac{203}{5} + \frac{9}{25}$

Zieht man nun beiderseitig die Quadrat-Wurzel aus, so erhält man:

$$x - \frac{3}{5} = \pm\sqrt{\left(\frac{203}{5} + \frac{9}{15}\right)} = \pm\sqrt{\left(\frac{1015}{25} + \frac{9}{25}\right)}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1924}{25}} = \pm\frac{\sqrt{1024}}{\sqrt{25}} = \pm\frac{32}{5}$$

Demnach $x - \frac{3}{5} = \pm\frac{32}{5}$ und $x = \frac{3}{5} \pm \frac{32}{5}$

Nimmt man den positivtn Werth der Wurzel, so erhält man $x = 7$.

Digitized by Google

VII. Abschnitt.

Vom arithmetischen und geometrischen Verhältnisse und von der arithmetischen und geometrischen Proportion.

§. 205.

Die Vergleichung zweier Größen behufs der Beantwortung der Frage: um wie viel die erste größer sey als die zweite, nennt man ein arithmetisches Verhältniß.

Die beiden zu vergleichenden Größen heißen Glieder, und die Größe, welche anzeigt, umwieviel das erste Glied größer ist, als das zweite, führt den Namen Denominator oder Differenz des Verhältnisses.

Von den beiden Gliedern heißt das erste Vorderglied, das andere Hinterglied oder Nachglied.

Verhältnisse, deren Vorderglied kleiner ist, als das Hinterglied, heißen steigende; ist aber das Vorderglied größer, als das Hinterglied, so nennt man sie fallende.

Durch den Denominator des arithmetischen Verhältnisses wird seine Größe oder sein Werth bestimmt — und man sagt, zwei arithmetische Verhältnisse sind einander gleich, wenn sie gleiche Denominatoren haben.

Das Zeichen für das arithmetische Verhältniß ist das Subtraktions-Zeichen (—), welches man zwischen Vorder- und Hinterglied setzt.

Bezeichnet a das Vorderglied, b das Nachglied, und d den Denominator eines arithmetischen Verhältnisses, so ist dessen allgemeiner Ausdruck:

$$a - b = d.$$

Digitized by Google

Beim steigenden arithmetischen Verhältnisse, für welches b größer als a, muß d nothwendig eine negative Größe werden, wenn a und b positiv sind.

§. 206.

Veränderung des Werthes eines arithmetischen Verhältnisses, wenn die Größe der Glieder sich ändert.

Aus der Gleichung $a - b = d$ kann man leicht a und b entwickeln, nämlich: $a = b + d$ und $b = a - d$ oder mit Worten:

Man findet das Vorderglied eines arithmetischen Verhältnisses, wenn man zum Hinterglied den Denominator addirt und man findet das zweite Glied, wenn man vom Vorderglied den Denominator subtrahirt.

Ferner ergibt sich aus der Gleichung

$$a - b = d$$

1) $(a + n) - b = d + n$ beiderseits n addirt
2) $(a - n) - b = d - n$ beiderseits n subtrahirt
3) $a - (b+n) = d - n$ denn $a - (b+n) = a - b - n$
od. $(a - b) - n$, da nun $a - b = d$,
so ist $(a - b) - n = d - n$
4) $a - (b - n) = d + n$ aus ähnlichem Grunde.
5) $an - bn = dn$ alle Glieder mit n multiplizirt
6) $\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{d}{n}$ alle Glieder durch n dividirt u. s. w.

aus welchen Gleichungen nun hervorgeht, wie sich der Werth eines arithmetischen Verhältnisses ändert, wenn das Vorderglied oder das Hinterglied um n größer oder kleiner, oder wenn Vorderglied oder Hinterglied gemeinschaftlich n mal größer oder kleiner werden.

§. 207.

Arithmetische Proportion.

Die Verbindung zweier gleicher arithmetischer Verhält

Digitized by Google

nisse durch das Gleichheits-Zeichen heißt eine **arithmetische Proportion.**

Diese hat vier Glieder, deren erstes und viertes die beiden äußern, das zweite und dritte die beiden mittleren genannt werden. Der allgemeine Ausdruck der arithmetischen Proportion ist $a - b = c - d$, nämlich eine Gleichung zwischen zwei Differenzen.

§. 208.

Jedes Glied einer arithmetischen Proportion zu finden, wenn die drei andern gegeben sind.

Schafft man in der Gleichung

$a - b = c - d$ das negative d auf die linke und das negative b auf die rechte Seite, so erhält man

$$a + d = b + c$$

nämlich: die Summe der beiden äußern Glieder ist gleich der Summe der beiden mittleren.

Auch unterliegt es, sobald man die arithmetische Proportion als eine Gleichung behandelt, keiner Schwierigkeit, jedes Glied derselben zu finden, wenn die drei übrigen gegeben sind, wie durch folgende Darstellung erläutert wird:

$x - b = c - d$	$x = b + c - d$
$a - x' = c - d$	$x' = a + d - c$
$a - b = x'' - d$	$x'' = a + d - b$
$a - b = c - x'''$	$x''' = b + c - a$

wo jedesmal der Werth von x nach den Gesetzen bestimmt wurde, die weiter oben zur Auflösung von Gleichungen aufgestellt wurden.

§. 209.

Vom geometrischen Verhältnisse und von den hier vorkommenden Benennungen.

Die Vergleichung zweier Größen mit Berücksichtigung der Frage, **wievielmal** die erste größer sey, als die andere, nennt man ein **geometrisches Verhältniß.**

Digitized by Google

Die Zahl, welche durch die Menge ihrer Einheiten anzeigt, wievielmal die erste größer sey, als die zweite, oder wievielmal die zweite in der ersten enthalten sey, heißt der Exponent des Verhältnisses.

Man gewinnt ihn, wenn man das erste Glied des Verhältnisses durch das zweite dividirt, und er gibt, wie beim arithmetischen Verhältnisse der Denominator, die Größe des Verhältnisses an.

Das Zeichen für das geometrische Verhältniß ist das der Division, welches zwischen Vorderglied und Nachglied gesetzt wird. Daher ist der allgemeinste Ausdruck des geometrischen Verhältnisses $a : b = e$, wenn e den Exponenten oder den Werth des Verhältnisses bezeichnet.

Die übrigen Benennungen sind wie für das arithmetische Verhältniß.

§. 210.

Das geometrische Verhältniß als Division oder als Bruch betrachtet, und Folgerungen.

Das geometrische Verhältniß $a : b = e$ kann offenbar als Division betrachtet werden, indem a den Dividend, b den Divisor und der Exponent e den Quotienten darstellt.

Eben so kann das geometrische Verhältniß als Bruch angesprochen werden, dessen Zähler das Vorderglied, Nenner das Hinterglied und Werth der Exponent ist. Nämlich statt $a : b = e$ kann man setzen $\frac{a}{b} = e$

Aus dieser Betrachtungsweise des geometrischen Verhältnisses läßt sich leicht entscheiden, welche Aenderung der Werth oder Exponent desselben erleidet, wenn sich Vorderglied oder Nachglied oder beide zugleich verändern. Nämlich:

a) Der Werth eines geometrischen Verhältnisses wird so vielmal größer oder kleiner, so vielmal das Vorderglied

Digitized by Google

größer oder kleiner wird; denn in einem nmal größeren Vorderglied ist das Nachglied nmal öfter enthalten, und das Wieoftenthaltenseyn gibt den Exponenten oder den Werth des Verhältnisses an.

Eben so ist in einem nmal kleiner Vordergliede das Nachglied nmal seltener enthalten.

b) Ein geometrisches Verhältniß wird nmal kleiner, wenn das Hinterglied nmal größer wird, denn ein nmal größeres Nachglied ist nmal seltener im Vordergliede enthalten. Eben so wird ein geometrisches Verhältniß nmal größer, wenn das Nachglied nmal kleiner wird, aus ähnlichem Grunde.

c) Der Werth eines geometrischen Verhältnisses bleibt ungeändert, wenn man Vorderglied und Hinterglied mit der nämlichen Größe multiplizirt oder durch die nämliche Größe dividirt, indem das Vorderglied als Dividend, das Hinterglied als Divisor und der Exponent als Quotus auftritt, und letzterer nicht verändert wird, wenn Dividend und Divisor gleichvielmal größer oder kleiner wird.

So ist z. B. das Verhältniß 16 : 2 noch einmal so groß, als das Verhältniß 8 : 2; dagegen sind die Verhältnisse 25:5 und 50 : 10 ihrem Werthe nach einander gleich.

§. 211.

Aus zwei im geometrischen Verhältnisse vorkommenden Stücken das dritte zu finden.

Aus dem allgemeinen Ausdrucke für das geometrische Verhältniß:

a : b = e, welcher sich als Gleichung, nämlich $\frac{a}{b} = e$ darstellt, folgt: $a = b \cdot e$ und $b = \frac{a}{e}$, so daß man also, wenn von den drei Stücken: Vorderglied, Nachglied und Exponent zwei gegeben sind, immer das dritte finden kann.

Digitized by Google

§. 212.

Geometrische Proportion.

Die Verbindung zweier gleicher geometrischer Verhältnisse durch das Gleichheits-Zeichen nennt man eine **geometrische Proportion.**

Der allgemeine Ausdruck der geometrischen Proportion ist demnach $a : b = c : d$ und sie wird gelesen: a verhält sich zu b, wie c zu d. Die Größen a und d nennt man die äussern, b und c die mittleren Glieder.

Eine geometrische Proportion, deren mittlere Glieder einander gleich sind, heißt stätig, nämlich:

$a : b = b : c$ was man auch so ausdrückt $a : b : c$.

§. 213.

Die geometrische Proportion als Gleichung betrachtet.

Die geometrische Proportion kann man unmittelbar als eine Gleichung zwischen zwei gleichen Quotienten oder Brüchen darstellen, indem man statt $a : b = c : d$ setzt:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ und mittelst dieser Betrachtungsweise lassen sich alle Eigenschaften der geometrischen Proportion entwickeln.

Umgekehrt darf man ohne Anstand jede Gleichung von der Form $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ in eine geometrische Proportion: $a : b = c : d$ verwandeln, indem man hier nur ein Divisions-Zeichen statt des andern setzte.

§. 214.

Das Produkt der äussern Glieder gleich dem Produkte der mittleren und Folgerungen.

Wenn $a : b = c : d$ mithin $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ so ist, wenn man die Divisoren b und d in obiger Gleichung durch Multiplikation wegschafft:

Digitized by Google

$ad = bc$ oder mit Worten: In jeder geometrischen Proportion ist das Produkt der äussern Glieder gleich dem Produkte der mittleren.

Sind nun von den vier Gliedern einer geometrischen Proportion drei gegeben, so kann man aus der Gleichung $ad = bc$ immer das vierte finden. Es sey z. B. die Proportion $a : x = c : d$ gegeben, und das zweite Glied zu finden. Man setze $cx = ad$ mithin $x = \frac{ad}{c}$ und so in andern Fällen.

Wäre dagegen eine Gleichung von der Form $ad = bc$ gegeben, so kann dieselbe in eine geometrische Proportion verwandelt werden. Nämlich aus $ad = bc$ folgt $\frac{ad}{b} = c$, indem man beiderseitig durch b dividirt, und hieraus folgt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ wenn man beiderseitig durch d dividirt.

Sind also zwei Produkte, jedes durch zwei Faktoren gebildet, einander gleich, so verhält sich jedesmal der erste Faktor des ersten Produktes zum ersten Faktor des zweiten, wie der zweite Faktor des zweiten Produktes zum zweiten Faktor des ersten. Wenn nämlich:

$$\begin{matrix} \text{I} & \text{II} & & (1) & (2) \\ a & d & = & b & c, \end{matrix}$$ so ist

$$a : b = c : d.$$

Um also zu untersuchen, ob eine Proportion richtig ist, bilde man das Produkt der äussern und das Produkt der mittleren Glieder und sehe nach, ob diese Produkte einander gleich sind. Hiebei wird aber vorausgesetzt, daß in der fraglichen Proportion beide Verhältnisse steigend oder beide fallend sind.

Digitized by Google

§. 215.

Veränderungen, welche mit den Gliedern der geometrischen Proportion vorgenommen werden dürfen.

Man mag also beliebige Veränderungen mit den Gliedern einer geometrischen Proportion vornehmen, so sind sie gestattet, wenn nur das Produkt der äussern Glieder gleich bleibt dem Produkte der mittleren. So darf man z. B. Glieder versetzen. Wenn nämlich:

$$a : b = c : d \text{ so ist auch}$$

$$b : a = d : c \text{ und}$$

$$a : c = b : d \text{ u. s. f.}$$

Denn man findet, daß die Gleichung $ad = bc$, welche für die gegebene Proportion $a : b = c : d$ gilt, auch bei den andern abgeleiteten Proportionen stattfindet.

Wenn ferner die Proportion $a : b = c : d$ richtig ist, so gelten auch folgende Proportionen:

1) $a + b : a = c + d : c$

2) $a + b : b = c + d : d$

3) $a - b : a = c - d : c$

4) $a - b : b = c - d : d$

5) $a + b : a - b = c + d : c - d$

Denn es ergibt sich, daß in jeder dieser gefolgerten Proportionen das Produkt der äussern Glieder gleich ist dem Produkte der mittleren, wie wir des Beispiels halber an der fünften nachweisen wollen. Da $a : b = c : d$ als richtige Proportion gegeben ist, so ist ohne Zweifel $ad = bc$.

Nun untersuche man die Proportion:

$$a + b : a - b = c + d : c - d$$

indem man die beiden äussern und die beiden mittleren Glieder mit einander multiplizirt. Man erhält:

Digitized by Google

$(a + b) \times (c - d) = ac + bc - ad - bd$

und $(a - b) \times (c + d = ac - bc + ad - bd$

und es handelt sich nur um die Wahrheit der Gleichung:

$$ac - ad + bc - bd \overset{?}{=} ac - bc + ad - bd$$

Da ac und — bd auf beiden Seiten vorkommt, lasse man diese Glieder beiderseitig weg und man erhält:

$$- ad + bc \overset{?}{=} ad - bc$$

Da nun nach der vorausgesetzten Proportion $ad = bc$, so ist $- ad + bc = 0$ und $ad - bc = 0$

Daher das Produkt der äussern Glieder gleich dem Produkte der mittleren, daher ist die unter Nro. 5. aufgeführte Proportion $a + b : a - b = c + d : c - d$ richtig.

Aehnlich und noch einfacher wird der Beweis für die übrigen abgeleiteten Proportionen geführt.

Multiplizirt man ferner die entsprechenden Glieder zweier oder auch mehrerer Proportionen mit einander, so bilden die Produkte wieder eine geometrische Proportion. Wenn nämlich: $a : b = c : d$

und $A : B = C : D$

---

so ist $a . A : bB = c . C : d . D.$

Denn in dieser Proportion ist das Produkt der äussern Glieder $aA . dD$ oder $ad . AD$, indem an der Ordnung der Faktoren nichts liegt, und das Produkt der innern Glieder ist $bB . cC$ oder was dasselbe ist: $bc . BC.$

Nun ist aber offenbar $ad . AD = bc . BC$ weil $ad = bc$ indem $a : b = c : d$ und $AD = BC$ indem $A : B = C : D.$ nach der Voraussetzung. Die gefolgerte Proportion ist also richtig.

Eben so bilden die Quotienten, welche entstehen, wenn man die entsprechenden Glieder zweier Proportionen durch einander dividirt, wieder eine Proportion.

Digitized by Google

Endlich kann man eines von den beiden Verhältnissen, deren Zusammenstellung die geometrische Proportion bildet, beliebig größer oder kleiner machen, wenn man nur mit dem andern Verhältnisse die nämliche Veränderung vornimmt. Hiedurch hat man unter andern ein Mittel, die Nenner von Brüchen aus einer Proportion wegzuschaffen. Wäre z. B.

$\frac{3}{4} : 7 = 18 : x$ so mache man nur das erste Verhältniß

$\frac{3}{4} : 7$ viermal größer, indem man sein Vorderglied mit 4 multiplizirt. Gleichzeitig vergrößere man aber durch das nämliche Mittel das zweite Verhältniß viermal, so ergibt sich die Proportion:

$$\frac{3 \cdot 4}{4} : 7 = 18 \cdot 4 : x \text{ oder}$$

$$3 : 7 = 72 : x$$

und so in andern Fällen.

Bayerische Staatsbibliothek München

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google